

УДК 519.652

**ЛИФТИНГОВЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ВЕЙВЛЕТНОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ**

В.А. Желудев, А.Б. Певный

Строится семейство биортогональных вейвлетов в пространстве дискретных периодических сигналов. Предлагаются прямой и двойственный лифтинговые алгоритмы для разложения дискретных сигналов по вейвлетным базисам.

1. Введение

В статье предлагается общая лифтинговая схема построения базисных функций $\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}$, сдвиги которых образуют биортогональные базисы в пространстве C_N всех N -периодических сигналов. В непрерывном случае аналогичные схемы рассматривались в [3]. Следует отметить, что полное перенесение непрерывных результатов на случай дискретных сигналов невозможно. Приходится, например, отказаться от масштабирующего уравнения (в английском написании refinement equation). Трудности, связанные с отсутствием масштабирующего уравнения, обходятся путем перехода в частотную область. Удаётся получить простые выражения не для векторов коэффициентов разложения сигнала по вейвлетному базису, а для дискретного преобразования Фурье (ДПФ) этих векторов (см. формулы (18)-(19) далее).

Строятся также прямой и двойственный лифтинговые алгоритмы для быстрого получения коэффициентов разложения по базисам. В итоге получаем быстрое вейвлетное преобразование сигнала. Это преобразование можно записать с использованием фильтров высоких и низких частот [5]. В данной работе преобразование выполняется в "лифтинговой" форме [7], что допускает эффективную компьютерную реализацию. Как и в других лифтинговых схемах, вычисления выполняются "на месте" (в одном массиве), а обратное преобразование

заключается в выполнении действий в обратном порядке. Отличие от других лифтинговых схем состоит в том, что вычисления ведутся в частотной области с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье.

Наличие управляющих функций $\beta_\nu(j)$ делает схему весьма гибкой, позволяет получать вейвлетные биортогональные базисы с разными свойствами, в частности можно добиться того, что базисные функции, принадлежащие разным уровням, станут ортогональными.

В заключительном разделе строится конструкция биортогональных вейвлетов, основанная на интерполяции дискретными периодическими сплайнами [4]. Для данного сигнала $z(k)$, $k \in 0 : N - 1$, где N является степенью двойки: $N = 2^t$, рассмотрим четный и нечетный подмассивы массива z :

$$e(k) = z(2k), \quad k \in 0 : m - 1; \quad d(k) = z(2k + 1), \quad k \in 0 : m - 1; \quad m = N/2.$$

При построении вейвлетных схем используем четный массив, чтобы предсказать значения нечетного на основе интерполяции дискретными N -периодическими сплайнами.

Наша схема идейно близка к схеме, реализованной в [1], где были использованы непрерывные интерполяционные сплайны. Метод предсказания нечетных элементов массива с помощью интерполяции на четных элементах был предложен в работе Донохоу [2], которая была модифицирована Свелденсом [3], [7] в "лифтинговую схему" и приняла законченный вид в работе [11].

2. Биортогональные вейвлетные схемы

Рассмотрим пространство \mathbb{C}_N всех N -периодических сигналов $z = \{z(j) | j \in \mathbb{Z}\}$. В этом разделе предполагаем, что N —четное, $N = 2N_1$. В \mathbb{C}_N вводится скалярное произведение

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \overline{y(j)}, \quad (1)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Биортогональная вейвлетная схема определяется четырьмя функциями $\varphi_1(l)$, $\tilde{\varphi}_1(l)$, $\psi_1(l)$, $\tilde{\psi}_1(l)$, имеющими период N , которые для любых $k, m \in 0 : N_1 - 1$ обладают свойствами

1. $\langle \varphi_1(\cdot - 2k), \tilde{\varphi}_1(\cdot - 2m) \rangle = \delta(k - m)$;
2. $\langle \varphi_1(\cdot - 2k), \psi_1(\cdot - 2m) \rangle = 0$;
3. $\langle \psi_1(\cdot - 2k), \tilde{\psi}_1(\cdot - 2m) \rangle = \delta(k - m)$;

$$4. \langle \psi_1(\cdot - 2k), \tilde{\varphi}_1(\cdot - 2m) \rangle = 0.$$

Здесь $\delta(0) = 1$ и $\delta(k) = 0$, если $k \neq 0$.

Это эквивалентно тому, что система функций

$$\{\varphi_1(\cdot - 2k), k \in 0 : N_1 - 1; \psi_1(\cdot - 2k), k \in 0 : N_1 - 1\} \quad (2)$$

биортогональна системе

$$\{\tilde{\varphi}_1(\cdot - 2k), k \in 0 : N_1 - 1; \tilde{\psi}_1(\cdot - 2k), k \in 0 : N_1 - 1\}. \quad (3)$$

В случае биортогональности элементы системы (2) линейно независимы и, значит, образуют базис в \mathbb{C}_N . То же верно для системы (3). Всякий элемент $z \in \mathbb{C}_N$ разлагается по базису (2):

$$z(\cdot) = \sum_{k=0}^{N_1-1} c_1(k) \varphi_1(\cdot - 2k) + \sum_{k=0}^{N_1-1} c_2(k) \psi_1(\cdot - 2k). \quad (4)$$

Важно разработать экономичные алгоритмы вычисления коэффициентов $c_1(k), c_2(k)$.

Свойства 1-4 удобно проверять, перейдя к ДПФ

$$h_1 = \mathcal{F}_N(\varphi_1), \tilde{h}_1 = \mathcal{F}_N(\tilde{\varphi}_1), g_1 = \mathcal{F}_N(\psi_1), \tilde{g}_1 = \mathcal{F}_N(\tilde{\psi}_1),$$

где \mathcal{F}_N — ДПФ длины N .

Лемма 1 (Достаточные условия биортогональности). *Если выполнены условия*

$$h_1(j) \overline{\tilde{h}_1(j)} + h_1(j + N_1) \overline{\tilde{h}_1(j + N_1)} = 2, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

$$h_1(j) \overline{\tilde{g}_1(j)} + h_1(j + N_1) \overline{\tilde{g}_1(j + N_1)} = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

$$g_1(j) \overline{\tilde{g}_1(j)} + g_1(j + N_1) \overline{\tilde{g}_1(j + N_1)} = 2, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

$$g_1(j) \overline{\tilde{h}_1(j)} + g_1(j + N_1) \overline{\tilde{h}_1(j + N_1)} = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

то справедливы свойства биортогональности 1-4.

Доказательство всех соотношений проводится по однотипным схемам. Скалярные произведения обозначим $\sigma_{km}^{(i)}$, $i \in 1 : 4$.

Имеем $\mathcal{F}_N(\varphi_1(\cdot - 2k)) = \omega_N^{-2kj} h_1(j) = \omega_{N_1}^{-kj} h_1(j)$, $\mathcal{F}_N(\tilde{\varphi}_1(\cdot - 2m)) = \omega_{N_1}^{-mj} \tilde{h}_1(j)$. По равенству Парсеваля

$$\sigma_{km}^{(1)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_1}^{(m-k)j} h_1(j) \overline{\tilde{h}_1(j)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_1}^{(m-k)j} (1 + H(j)),$$

где $H(j) = h_1(j)\overline{\tilde{h}_1(j)} - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned}\sigma_{km}^{(1)} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_1}^{(m-k)j} + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N_1-1} \omega_{N_1}^{(m-k)j} H(j) = \\ &= \delta(m-k) + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_1-1} \omega_{N_1}^{(m-k)j} [H(j) + H(j+N_1)] = \delta(m-k),\end{aligned}$$

ибо по условию (5) $H(j) + H(j+N_1) \equiv 0$.

Свойства 2-4 доказываются аналогично. •

Было бы интересно описать все множество функций $h_1, \tilde{h}_1, g_1, \tilde{g}_1$, удовлетворяющих условиям (5)-(8). Ограничимся традиционным выбором функций g_1, \tilde{g}_1 по формулам

$$\tilde{g}_1(j) = \omega_N^{-j} \overline{h_1(j+N_1)}, \quad g_1(j) = \omega_N^{-j} \overline{\tilde{h}_1(j+N_1)}. \quad (9)$$

Тогда если выполнено (5), то выполняются и остальные условия (6),(7),(8). Таким образом условия (5)-(8) сводятся к одному условию (5).

Лемма 2. Пусть функция h_1 такова, что $h_1(j)$ и $h_1(j+N_1)$ не обращаются одновременно в нуль и пусть \tilde{h}_1^0 удовлетворяет соотношению

$$h_1(j)\overline{\tilde{h}_1^0(j)} + h_1(j+N_1)\overline{\tilde{h}_1^0(j+N_1)} = 2, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

а $\tilde{h}_1(j)$ удовлетворяет (5). Тогда

$$\tilde{h}_1(j) = \tilde{h}_1^0(j) + \omega_N^{-j} \overline{h_1(j+N_1)s(j)}, \quad (11)$$

где $s(j)$ —функция с периодом N_1 . Обратно, если выполнено (10) и (11), то $\tilde{h}_1(j)$ удовлетворяет (5).

Доказательство. Разность $d(j) = \overline{\tilde{h}_1(j)} - \overline{\tilde{h}_1^0(j)}$ удовлетворяет уравнению

$$h_1(j)d(j) + h_1(j+N_1)d(j+N_1) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Нужно доказать, что $d(j)$ имеет вид

$$d(j) = \omega_N^j h_1(j+N_1)s(j), \quad (13)$$

где $s(j)$ —функция с периодом N_1 . Введем множество $J = \{j \in \mathbb{Z} : h_1(j+N_1) = 0\}$ и определим $s(j)$ равенствами $s(j) = d(j)/(\omega_N^j h_1(j+N_1))$ для $j \notin J$ и $s(j) = s(j+N_1)$ для $j \in J$. Это определение корректно, так как если $j \in J$, то $j+N_1 \notin J$. Легко видеть, что s имеет период $2N_1$.

Равенство (13) выполняется для $j \notin J$. Если же $j \in J$, то $h_1(j) \neq 0$ и в силу (12) $d(j) = 0$. Поэтому (13) выполняется и для $j \in J$.

Покажем, что функция $s(j)$ имеет период N_1 . Рассмотрим три случая, возможных в фиксированной точке j :

1) $h_1(j) \neq 0, h_1(j + N_1) \neq 0$. В этом случае, подставив (13) в (12), получим равенство $h_1(j)h_1(j + N_1)\omega_N^j[s(j) - s(j + N_1)] = 0$, откуда $s(j + N_1) = s(j)$.

2) $h_1(j) \neq 0, h_1(j + N_1) = 0$, т.е. $j \in J$. Тогда также $s(j) = s(j + N_1)$.

3) $h_1(j) = 0, h_1(j + N_1) \neq 0$. Тогда $j - N_1 \in J$ и $s(j - N_1) = s(j)$. Отсюда (поскольку s имеет период $2N_1$) следует равенство $s(j + N_1) = s(j)$.

Обратное утверждение доказывается прямой подстановкой (11) в (5). •

В непрерывном случае аналогичную лемму можно найти в книге I. Daubechies [10, p.133].

Введем обозначение $\beta_1(j) = \omega_N^j s(j)$. Тогда функция β_1 обладает свойством

$$\beta_1(j + N_1) = -\beta_1(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (14)$$

и, значит, β_1 имеет период $2N_1 = N$. Формулы (11) и (9) можно переписать в виде

$$\tilde{h}_1(j) = \tilde{h}_1^0(j) + \overline{\beta_1(j)h_1(j + N_1)}, \quad (15)$$

$$g_1(j) = \omega_N^{-j} [\overline{\tilde{h}_1^0(j + N_1) - \beta_1(j)h_1(j)}]. \quad (16)$$

Получение \tilde{h}_1 и g_1 по этим формулам называется лифтинговой схемой (см. [3]). Таким образом, в лифтинговой схеме выявляется степень свободы в выборе \tilde{h}_1 и g_1 , которая остается после выполнения условий биортогональности.

3. Лифтинговый алгоритм получения коэффициентов разложения в интерполяционном случае

3.1. Прямой лифтинговый алгоритм.

Всякий сигнал $z \in \mathbb{C}_N$ разлагается по системе (2). В интересах дальнейшего коэффициенты обозначим $\tilde{e}_1(k), \tilde{d}_1(k)$:

$$z(\cdot) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \tilde{e}_1(k)\varphi_1(\cdot - 2k) + \sum_{k=0}^{N_1-1} \tilde{d}_1(k)\psi_1(\cdot - 2k). \quad (17)$$

Для коэффициентов справедливы формулы $\tilde{e}_1(k) = \langle z, \tilde{\varphi}_1(\cdot - 2k) \rangle$, $\tilde{d}_1(k) = \langle z, \tilde{\psi}_1(\cdot - 2k) \rangle$. Вычисление всех коэффициентов по этим формулам требует N^2 умножений. Выгоднее воспользоваться равенством

Парсеваля. Обозначим $Z = \mathcal{F}_N(z)$ ДПФ исходного сигнала z . Имеем $\mathcal{F}_N(\tilde{\varphi}_1(\cdot - 2k)) = \omega_N^{-2kj} \tilde{h}_1(j) = \omega_N^{-kj} \tilde{h}_1(j)$. Тогда

$$\tilde{e}_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} Z(j) \omega_N^{kj} \overline{\tilde{h}_1(j)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_1-1} \omega_N^{kj} \left[\overline{\tilde{h}_1(j)Z(j)} + \overline{\tilde{h}_1(j+N_1)Z(j+N_1)} \right].$$

Отсюда $\tilde{E}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\tilde{e}_1)$ есть выражение в квадратных скобках с коэффициентом $\frac{1}{2}$:

$$\tilde{E}_1(j) = \frac{1}{2} \left[\overline{\tilde{h}_1(j)Z(j)} + \overline{\tilde{h}_1(j+N_1)Z(j+N_1)} \right], \quad (18)$$

Аналогично получим $\tilde{D}_1 = \mathcal{F}_{N_1}(\tilde{d}_1)$:

$$\tilde{D}_1(j) = \frac{1}{2} \left[\overline{\tilde{g}_1(j)Z(j)} + \overline{\tilde{g}_1(j+N_1)Z(j+N_1)} \right]. \quad (19)$$

Предполагаем, что выполнены условия (5) и (9). Тогда легко вывести формулу реконструкции

$$Z(j) = h_1(j)\tilde{E}_1(j) + g_1(j)\tilde{D}_1(j).$$

Вычисления по схеме $z \mapsto Z$, вычисления (18)-(19) для $j \in 0 : N_1 - 1$ и далее обратные ДПФ $\tilde{E}_1 \mapsto \tilde{e}_1$, $\tilde{D}_1 \mapsto \tilde{d}_1$ требуют $O(N \log_2 N)$ операций.

Чуть более экономичным является *лифтинговый алгоритм*, который реализуем в *интерполяционном случае*.

Интерполяционным будем называть случай, когда h_1 имеет вид

$$h_1(j) = 1 + U_1(j), \quad (20)$$

где N -периодическая вещественная функция U_1 обладает свойством

$$U_1(j + N_1) = -U_1(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

В этом случае $h_1(j) + h_1(j + N_1) \equiv 2$, в частности $h_1(j)$ и $h_1(j + N_1)$ не обращаются одновременно в нуль.

Название "интерполяционный случай" возникло под влиянием статьи Свелденса[3]. В непрерывном случае фильтр $h(\omega)$ называется интерполяционным, если выполнено равенство $h(\omega) + h(\omega + \pi) = 1$.

Возьмем самую простую функцию $\tilde{h}_1^0(j) \equiv 1$, удовлетворяющую (10). Тогда равенства (15) и (9) принимают вид

$$\tilde{h}_1(j) = 1 + \overline{\beta_1(j)} h_1(j + N_1), \quad (22)$$

$$g_1(j) = \omega_N^{-j} [1 - \beta_1(j)h_1(j)], \quad \tilde{g}_1(j) = \omega_N^{-j} h_1(j + N_1). \quad (23)$$

В формулах (20), (22), (23) функции $U_1(j)$ и $\beta_1(j)$ должны обладать свойствами (21) и (14), а в остальном произвольны (и при любом выборе этих функций выполняются достаточные условия биортогональности (5)-(8)).

Лифтинговый алгоритм состоит из трех этапов.

1) Расщепление. Расщепим сигнал z на два массива

$$e_1(k) = z(2k), \quad k \in 0 : N_1 - 1; \quad d_1(k) = z(2k + 1), \quad k \in 0 : N_1 - 1,$$

и найдем их ДПФ $E_1 = \mathcal{F}_{N_1}(e_1)$, $D_1 = \mathcal{F}_{N_1}(d_1)$. Ввиду равенства $N = 2N_1$ справедливы соотношения

$$E_1(j) = \frac{1}{2} [Z(j) + Z(j + N_1)], \quad D_1(j) = \frac{1}{2} \omega_N^j [Z(j) - Z(j + N_1)]. \quad (24)$$

$$Z(j) = E_1(j) + \omega_N^{-j} D_1(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

2) Переход от E_1 и D_1 к \tilde{D}_1 . Для получения формул этого перехода подставим (25) в (23). Получим с учетом (9)

$$\tilde{D}_1(j) = \frac{1}{2} [h_1(j + N_1) + h_1(j)] E_1(j) + \frac{1}{2} [h_1(j + N_1) - h_1(j)] \omega_N^j D_1(j).$$

Применив формулы (20)-(21), придем к окончательной вычислительной формуле

$$\tilde{D}_1(j) = D_1(j) - E_1(j) \omega_N^j U_1(j), \quad j \in 0 : N_1 - 1. \quad (26)$$

3) Обновление E_1 . Подставим (25) в (18). Получим

$$\tilde{E}_1(j) = \frac{1}{2} [\overline{\tilde{h}_1(j + N_1)} + \overline{\tilde{h}_1(j)}] E_1(j) + \frac{1}{2} [\overline{\tilde{h}_1(j + N_1)} - \overline{\tilde{h}_1(j)}] \omega_N^j D_1(j).$$

С учетом (22),(24) придем к окончательной формуле

$$\tilde{E}_1(j) = E_1(j) + \beta_1(j) \omega_N^{-j} \tilde{D}_1(j), \quad j \in 0 : N_1 - 1. \quad (27)$$

В некоторых работах, например [11],[12], лифтинговый алгоритм получают путем факторизации матрицы преобразования. Нечто подобное возможно и в нашем случае. Формулы (18)-(19) можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_1(j) \\ \tilde{D}_1(j) \end{bmatrix} = M(j) \begin{bmatrix} Z(j) \\ Z(j + N_1) \end{bmatrix}, \quad \text{где } M(j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \overline{\tilde{h}_1(j)} & \overline{\tilde{h}_1(j + N_1)} \\ \overline{\tilde{g}_1(j)} & \overline{\tilde{g}_1(j + N_1)} \end{bmatrix}.$$

Каждый шаг лифтингового алгоритма также может быть представлен в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} E_1(j) \\ D_1(j) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega_N^j & -\omega_N^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(j) \\ Z(j + N_1) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} E_1(j) \\ \tilde{D}_1(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_N^j U_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j) \\ D_1(j) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{E}_1(j) \\ \tilde{D}_1(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \omega_N^{-j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j) \\ \tilde{D}_1(j) \end{bmatrix}.$$

В результате придем к факторизации матрицы $M(j)$.

Теорема 1. Матрица $M(j)$ представляется в виде произведения

$$M(j) = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \omega_N^{-j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_N^j U_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \omega_N^j & -\omega_N^j \end{bmatrix}.$$

Восстановим сигнал z по \tilde{D}_1 и \tilde{E}_1 . Для этого нужно проделать действия в "обратном порядке". Из (27) и (26) получим

$$E_1(j) = \tilde{E}_1(j) - \beta_1(j) \omega_N^{-j} \tilde{D}_1(j), \quad D_1(j) = \tilde{D}_1(j) + E_1(j) \omega_N^j U_1(j). \quad (28)$$

Далее обратными ДПФ $E_1 \mapsto e_1$, $D_1 \mapsto d_1$ восстанавливаем четный и нечетный подмассивы массива z .

3.2. Двойственный лифтинговый алгоритм.

Он дает коэффициенты разложения по двойственному базису (3). В прямом алгоритме обновленный вектор \tilde{E}_1 содержит управляющую функцию $\beta_1(j)$. Опишем двойственный алгоритм, в котором управляющая функция $\alpha_1(j)$ будет содержаться в обновленном векторе \tilde{D}_1 .

Декомпозиция. Сначала разложим сигнал z на четный и нечетный подмассивы:

$$e_1(k) = z(2k), \quad k \in 0 : N_1 - 1; \quad d_1(k) = z(2k + 1), \quad k \in 0 : N_1 - 1. \quad (29)$$

Найдем ДПФ $E_1 = \mathcal{F}_{N_1}(e_1)$, $D_1 = \mathcal{F}_{N_1}(d_1)$. Далее вычислим

$$\tilde{E}_1(j) = \frac{1}{2} [E_1(j) + \omega_N^{-j} U_1(j) D_1(j)], \quad j \in 0 : N_1 - 1, \quad (30)$$

$$\tilde{D}_1(j) = D_1(j) - 2\alpha_1(j) \omega_N^j \tilde{E}_1(j), \quad j \in 0 : N_1 - 1, \quad (31)$$

где $\alpha_1(j)$ — N -периодическая функция со свойством $\alpha_1(j + N_1) = -\alpha_1(j)$.

Реконструкция. Восстановим нечетный массив

$$D_1(j) = \tilde{D}_1(j) + 2\alpha_1(j) \omega_N^j \tilde{E}_1(j), \quad j \in 0 : N_1 - 1, \quad (32)$$

а далее реконструируем четный:

$$E_1(j) = 2\tilde{E}_1(j) - \omega_N^{-j} U_1(j) D_1(j), \quad j \in 0 : N_1 - 1. \quad (33)$$

Обратным ДПФ находим e_1, d_1 , т.е. исходный сигнал z .

Запишем формулы декомпозиции и реконструкции в фильтровой форме. Подставим выражения (24) в (30). Получим

$$\tilde{E}_1(j) = \frac{1}{2} [\tilde{p}_1(j) Z(j) + \tilde{p}_1(j + N_1) Z(j + N_1)], \quad j \in 0 : N_1 - 1,$$

где $\tilde{p}_1(j) = \frac{1}{2}(1 + U_1(j)) = \frac{1}{2} h_1(j)$. Подставим (24) в (31). Получим

$$\tilde{D}_1(j) = \frac{1}{2} [\tilde{q}_1(j) Z(j) + \overline{\tilde{q}_1(j + N_1)} Z(j + N_1)], \quad j \in 0 : N_1 - 1,$$

где $\tilde{q}_1(j) = \omega_N^{-j} (1 - \overline{\alpha_1(j)} h_1(j))$.

Из (32) и (33) легко получить формулы реконструкции в фильтровой форме

$$Z(j) = E_1(j) + D_1(j) \omega_N^{-j} = p_1(j) \tilde{E}_1(j) + q_1(j) \tilde{D}_1(j), \quad j \in 0 : N - 1, \quad (34)$$

где

$$p_1(j) = 2(1 + \alpha_1(j)(1 - U_1(j))), \quad q_1(j) = \omega_N^{-j} (1 - U_1(j)).$$

Замечание 1. При $\alpha_1 = \overline{\beta_1}$ будет $\tilde{p}_1 = \frac{1}{2} h_1$, $\tilde{q}_1 = g_1$, $p_1 = 2\tilde{h}_1$, $q_1 = \tilde{g}_1$, т.е. можно сказать, что фильтры декомпозиции и реконструкции в прямой схеме меняются местами с фильтрами реконструкции и декомпозиции в двойственной схеме.

Двойственный лифтинговый алгоритм (при $\alpha_1 = \overline{\beta_1}$) дает коэффициенты разложения по базису (3).

Теорема 2. Пусть $\alpha_1 = \overline{\beta_1}$. Всякий сигнал $z \in \mathbb{C}_N$ разлагается по системе (3):

$$z(\cdot) = \sum_{k=0}^{N_1-1} 2\tilde{e}_1(k) \tilde{\varphi}_1(\cdot - 2k) + \sum_{k=0}^{N_1-1} \tilde{d}_1(k) \tilde{\psi}_1(\cdot - 2k),$$

где \tilde{e}_1, \tilde{d}_1 — векторы, полученные в двойственном лифтинговом алгоритме по формулам (30), (31) (точнее, \tilde{e}_1, \tilde{d}_1 — обратные ДПФ от \tilde{E}_1, \tilde{D}_1).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и опирается на соотношения (34) и $p_1 = 2\tilde{h}_1$, $q_1 = \tilde{g}_1$. •

3.3. Многоуровневая декомпозиция сигналов.

В результате первого шага декомпозиции сигнала z получается набор $\{E_1(j), \tilde{D}_1(j)\}$. Далее процесс декомпозиции можно продолжить, расщепив вектор $c_1 = \mathcal{F}_{N_1}^{-1}(\tilde{E}_1)$ на два подмассива c_2, d_2 и продолжив в духе формул (26)-(27).

Предположим, что $N = 2^t$ и будем использовать обозначение $N_\nu = N/2^\nu$. Введем дискретную функцию

$$U_\nu(j) = U_1(2^{\nu-1}j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где U_1 — та же функция, что и в формулах (20)-(21). Функция $U_\nu(j)$ имеет период $2N_\nu$ и обладает свойством $U_\nu(j + N_\nu) = -U_\nu(j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Действия прямого лифтингового алгоритма для уровней $\nu = 2, \dots, t$ можно описать так:

1) для $j \in 0 : N_\nu - 1$ вычислим

$$E_\nu(j) = \frac{1}{2}[\tilde{E}_{\nu-1}(j) + \tilde{E}_{\nu-1}(j + N_\nu)], \quad D_\nu(j) = \frac{1}{2}\omega_{N_{\nu-1}}^j[\tilde{E}_{\nu-1}(j) - \tilde{E}_{\nu-1}(j + N_\nu)]; \quad (35)$$

2) уточним E_ν и D_ν по формулам

$$\tilde{D}_\nu(j) = D_\nu(j) - E_\nu(j)\omega_{N_{\nu-1}}^j U_\nu(j), \quad (36)$$

$$\tilde{E}_\nu(j) = E_\nu(j) + \beta_\nu(j)\omega_{N_{\nu-1}}^{-j} \tilde{D}_\nu(j), \quad j \in 0 : N_\nu - 1, \quad (37)$$

где $\beta_\nu(j)$ — вещественная функция с периодом $2N_\nu$, обладающая свойством

$$\beta_\nu(j + N_\nu) = -\beta_\nu(j). \quad (38)$$

Замечание 2. О выборе $\beta_\nu(j)$ речь пойдет в п.4.2. С точки зрения числа операций самым трудоемким этапом лифтингового алгоритма являются исходные ДПФ $e_1 \mapsto E_1$, $d_1 \mapsto D_1$. Но и с учетом этого сложность алгоритма $O(N \log_2 N)$.

Формулы (36)-(37) можно записать в “фильтровом” виде:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\nu(j) &= \frac{1}{2}[\overline{\tilde{g}_\nu(j)} \tilde{E}_{\nu-1}(j) + \overline{\tilde{g}_\nu(j + N_\nu)} \tilde{E}_{\nu-1}(j + N_\nu)], \\ \tilde{E}_\nu(j) &= \frac{1}{2}[\overline{\tilde{h}_\nu(j)} \tilde{E}_{\nu-1}(j) + \overline{\tilde{h}_\nu(j + N_\nu)} \tilde{E}_{\nu-1}(j + N_\nu)], \end{aligned} \quad (39)$$

где $j \in 0 : N_\nu - 1$ и

$$\tilde{h}_\nu(j) = 1 + \overline{\beta_\nu(j)}(1 - U_\nu(j)), \quad \tilde{g}_\nu(j) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-j}(1 - U_\nu(j)). \quad (40)$$

Формулы (39) справедливы для $\nu = 1, \dots, t$, если считать $\tilde{E}_0 = Z$ — ДПФ исходного сигнала z .

Результатом декомпозиции сигнала z является набор $\{\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_t, \tilde{E}_t\}$. Как восстановить исходный сигнал z ? Из (36)-(37) легко находим

$$E_\nu(j) = \tilde{E}_\nu(j) - \beta_\nu(j)\omega_{N_{\nu-1}}^{-j}\tilde{D}_\nu(j),$$

$$D_\nu(j) = \tilde{D}_\nu(j) + E_\nu(j)\omega_{N_{\nu-1}}^j U_\nu(j), \quad j \in 0 : N_\nu - 1,$$

$\nu = t, t-1, \dots, 1$. Зная E_1 и D_1 , обратным ДПФ находим e_1 и d_1 — четный и нечетный подмассивы массива z .

В фильтровой форме формулы реконструкции записываются в виде

$$\tilde{E}_{\nu-1}(j) = h_\nu(j)\tilde{E}_\nu(j) + g_\nu(j)\tilde{D}_\nu(j), \quad j \in 0 : N_{\nu-1} - 1, \quad (41)$$

где $\nu = t, t-1, \dots, 1$, а функции h_ν, g_ν определяются по формулам

$$h_\nu(j) = 1 + U_\nu(j), \quad g_\nu(j) = \omega_{N_{\nu-1}}^{-j}(1 - \beta_\nu(j)h_\nu(j)).$$

Последнее $\tilde{E}_0(j)$ совпадает с $Z(j)$.

4. Вейвлетное разложение пространства сигналов

Введем подпространства, являющиеся линейными оболочками сдвигов функций φ_1 и ψ_1 :

$$V_1 = \mathcal{L}\{\varphi_1(\cdot - 2k) | k \in 0 : N_1 - 1\}, \quad W_1 = \mathcal{L}\{\psi_1(\cdot - 2k) | k \in 0 : N_1 - 1\}.$$

Поскольку элементы базиса (2) линейно независимы, то $\dim V_1 = \dim W_1 = N_1$ и \mathbf{C}_N есть прямая сумма V_1 и W_1 : $\mathbf{C}_N = V_1 + W_1$.

Мы по-прежнему рассматриваем интерполяционный случай, в котором функции $h_1, \tilde{h}_1, g_1, \tilde{g}_1$ определяются формулами (18), (20), (21). От содержащейся в них функции β_1 не требовалось ничего, кроме свойства $\beta_1(j + N_1) = -\beta_1(j)$. Выбор $\beta_1(j)$ является важным дополнительным ресурсом, и его можно потратить на разные цели, например добиться, чтобы подпространства V_1 и W_1 стали ортогональными.

Лемма 3. Пусть $\beta_1(j) = U_1(j)/(1 + U_1^2(j))$. Тогда справедливо следующее соотношение ортогональности

$$\langle \varphi_1(\cdot - 2k), \psi_1(\cdot - 2m) \rangle = 0 \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Имеем $\mathcal{F}_N(\psi_1(\cdot - 2k)) = \omega_{N_1}^{-kj} g_1(j)$. По равенству Парсеваля скалярное произведение равно

$$\sigma_{km} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_1}^{(m-k)j} h_1(j) \overline{g_1(j)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{(2m-2k+1)j} G(j),$$

где $G(j) = 1 + U_1(j) - \overline{\beta_1(j)}(1 + U_1(j))^2$. Отсюда

$$\begin{aligned}\sigma_{km} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N_1-1} \omega_N^{(2m-2k+1)j} G(j) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_1-1} \left[\omega_N^{(2m-2k+1)j} G(j) + \omega_N^{(2m-2k+1)(j+N_1)} G(j+N_1) \right].\end{aligned}$$

Ввиду равенства $\omega_N^{N_1} = -1$ квадратная скобка равна нулю, если выполнено условие $G(j+N_1) = G(j)$, что эквивалентно

$$-U_1(j) + \overline{\beta_1(j)}(1 - U_1(j))^2 = U_1(j) - \overline{\beta_1(j)}(1 + U_1(j))^2.$$

Отсюда $\beta_1(j) = U_1(j)/(1 + U_1^2(j))$, что и в условиях теоремы. В итоге $\sigma_{km} = 0$ для всех k, m . •

Замечание 3. В условиях леммы 3 имеем, что $V_1 \perp W_1$, а тогда $V_1 \oplus W_1 = \mathbb{C}_N$. Из свойства биортогональности 4 (см. начало раздела 2) следует, что $\tilde{\varphi}_1(\cdot - 2k) \in V_1$, а из свойства 2 следует, что $\tilde{\psi}_1(\cdot - 2k) \in W_1$ для всех k . В силу $V_1 \perp W_1$ получаем дополнительное свойство $\langle \tilde{\varphi}_1(\cdot - 2k), \tilde{\psi}_1(\cdot - 2m) \rangle = 0 \forall k, m \in \mathbb{Z}$.

4.1. Базисные функции и подпространства при $\nu > 1$.

При $\nu = 2, \dots, t$ введем базисные функции $\varphi_\nu, \tilde{\varphi}_\nu, \psi_\nu, \tilde{\psi}_\nu$, имеющие период N и удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N(\varphi_\nu) &= H_\nu, & H_\nu(j) &= h_1(j) \dots h_{\nu-1}(j) h_\nu(j), \\ \mathcal{F}_N(\tilde{\varphi}_\nu) &= \tilde{H}_\nu, & \tilde{H}_\nu(j) &= \tilde{h}_1(j) \dots \tilde{h}_{\nu-1}(j) \tilde{h}_\nu(j), \\ \mathcal{F}_N(\psi_\nu) &= G_\nu, & G_\nu(j) &= h_1(j) \dots h_{\nu-1}(j) g_\nu(j), \\ \mathcal{F}_N(\tilde{\psi}_\nu) &= \tilde{G}_\nu, & \tilde{G}_\nu(j) &= \tilde{h}_1(j) \dots \tilde{h}_{\nu-1}(j) \tilde{g}_\nu(j),\end{aligned}$$

где \mathcal{F}_N — ДПФ длины N . В непрерывном случае такие функции введены в [1].

Введем подпространства, являющиеся линейными оболочками сдвигов функций φ_ν и ψ_ν :

$$V_\nu = \mathcal{L}\{\varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k) | k \in 0 : N_\nu - 1\}, \quad W_\nu = \mathcal{L}\{\psi_\nu(\cdot - 2^\nu k) | k \in 0 : N_\nu - 1\}.$$

Наша ближайшая цель — показать, что $V_\nu = V_{\nu+1} + W_{\nu+1}$ (V_0 — это пространство \mathbb{C}_N всех N -периодических сигналов).

Лемма 4. *Справедливы включения*

$$V_{\nu+1} \subset V_\nu, \quad W_{\nu+1} \subset V_\nu, \quad \nu \in 1 : t-1.$$

Доказательство. Имеем с учетом равенства $H_{\nu+1} = h_{\nu+1} H_\nu$

$$\varphi_{\nu+1}(l - 2^{\nu+1}m) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj} \omega_{N_\nu}^{-2mj} h_{\nu+1}(j) H_\nu(j),$$

$$\varphi_\nu(l - 2^\nu k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj} \omega_{N_\nu}^{-kj} H_\nu(j).$$

Нужно доказать, что существуют коэффициенты $c^m(k)$ такие, что

$$\varphi_{\nu+1}(l - 2^{\nu+1}m) = \sum_{k=0}^{N_\nu-1} c^m(k) \varphi_\nu(l - 2^\nu k).$$

Это выполнено, если

$$\sum_{k=0}^{N_\nu-1} c^m(k) \omega_{N_\nu}^{-kj} = \omega_{N_\nu}^{-2mj} h_{\nu+1}(j), \quad j \in 0 : N - 1.$$

Обе части этого равенства имеют период N_ν . В качестве $\{c^m(k)\}$ возьмем обратное ДПФ (длины N_ν) от $\{\omega_{N_\nu}^{-2mj} h_{\nu+1}(j)\}$. Тогда $V_{\nu+1} \subset V_\nu$. Аналогично показывается, что $W_{\nu+1} \subset V_\nu$. •

На ν -м уровне также выполняется свойство биортогональности.

Лемма 5. *Справедливы следующие соотношения биортогональности и ортогональности (для любого $\nu \in 1 : t$ и любых $k, m \in 0 : N_\nu - 1$):*

1. $\langle \varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \tilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle = \delta(k - m);$
2. $\langle \varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \tilde{\psi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle = 0;$
3. $\langle \psi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \tilde{\psi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle = \delta(k - m);$
4. $\langle \psi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \tilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle = 0.$

Здесь $\delta(0) = 1$ и $\delta(k) = 0$, если $k \neq 0$.

Доказательство всех соотношений проводится однотипно. Скалярные произведения обозначим $\sigma_{km}^{(i)}$, $i \in 1 : 4$.

Имеем $\mathcal{F}_N(\varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k)) = \omega_{N_\nu}^{-kj} H_\nu(j)$, $\mathcal{F}_N(\tilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu m)) = \omega_{N_\nu}^{-mj} \tilde{H}_\nu(j)$. По равенству Парсеваля

$$\sigma_{km}^{(1)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} H_\nu(j) \overline{\tilde{H}_\nu(j)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} h_1(j) \tilde{h}_1(j) \dots h_\nu(j) \tilde{h}_\nu(j).$$

Для любого $k \in 1 : \nu$ имеем $h_k \tilde{h}_k = 1 + M_k$, где $M_k = U_k + \beta_k(1 - U_k^2)$ обладает свойством $M_k(j + N_k) = -M_k(j)$ и имеет период $2N_k$. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{km}^{(1)} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} [1 + M_1][1 + M_2] \dots [1 + M_\nu] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_1-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} [1 + M_1(j) + 1 + M_1(j + N_1)][1 + M_2] \dots [1 + M_\nu], \end{aligned}$$

ибо выражение $[1 + M_2] \dots [1 + M_\nu]$ имеет период N_1 . Но $M_1(j) + M_1(j + N_1) = 0$, поэтому

$$\sigma_{km}^{(1)} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=0}^{N_1-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} [1 + M_2] \dots [1 + M_\nu].$$

Повторяя только что использованный прием, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{km}^{(1)} &= \frac{1}{N_2} \sum_{j=0}^{N_2-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} [1 + M_3] \dots [1 + M_\nu] = \dots \\ &\dots = \frac{1}{N_\nu} \sum_{j=0}^{N_\nu-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} = \delta_{N_\nu}(m - k). \end{aligned}$$

Утверждения 2–4 доказываются аналогично. •

При доказательстве леммы 5 от функции β_ν не требовалось ничего, кроме свойства $\beta_\nu(j + N_\nu) = -\beta_\nu(j)$. Если же выбрать β_ν в нужном виде, то можно обеспечить ортогональность подпространств V_ν и W_ν .

Лемма 6. *Зафиксируем $\nu \in 1 : t$. Если выбрать β_ν по формуле*

$$\beta_\nu(j) = (h_\nu(j)A_\nu(j) - h_\nu(j + N_\nu)A_\nu(j + N_\nu))/A_{\nu+1}(j), \quad (42)$$

где функции A_ν и $A_{\nu+1}$ определяются рекуррентно:

$$A_{k+1}(j) = h_k^2(j)A_k(j) + h_k^2(j + N_k)A_k(j + N_k), \quad k \in 0 : \nu, \quad A_1(j) = 1, \quad (43)$$

то подпространство V_ν ортогонально W_ν .

Доказательство. При $\nu = 1$ утверждение леммы совпадает с утверждением леммы 3. При $\nu > 1$ скалярные произведения $\sigma_{km} = \langle \varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k), \psi_\nu(\cdot - 2^\nu m) \rangle$ будем вычислять как в лемме 5:

$$\sigma_{km} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_{N_\nu}^{(m-k)j} H_\nu(j) \overline{G_\nu(j)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Omega(j) h_1^2(j) \dots h_{\nu-1}^2(j) Q_\nu(j),$$

где $\Omega(j) = \omega_{N_{\nu-1}}^{(2m-2k+1)j}$, $Q_\nu(j) = h_\nu(j)(1 - \beta_\nu(j)h_\nu(j))$. Имеем

$$\sigma_{km} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_1-1} \Omega(j) [h_1^2(j) + h_1^2(j + N_1)] h_2^2(j) \dots h_{\nu-1}^2(j) Q_\nu(j).$$

Выражение в квадратных скобках есть $A_2(j)$. Далее имеем

$$\sigma_{km} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_2-1} \Omega(j) [h_2^2(j)A_2(j) + h_2^2(j+N_2)A_2(j+N_2)] h_3^2(j) \dots \\ \dots h_{\nu-1}^2(j)Q_\nu(j).$$

В квадратных скобках стоит $A_3(j)$. После $\nu - 1$ шагов получим

$$\sigma_{km} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_\nu-1} \Omega(j) A_\nu(j) Q_\nu(j) = \\ = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N_\nu-1} \Omega(j) [A_\nu(j)Q_\nu(j) - A_\nu(j+N_\nu)Q_\nu(j+N_\nu)].$$

Элементарно проверяется, что при выборе β_ν по формуле (42) выражение в квадратных скобках обращается в нуль. Поэтому $\sigma_{km} = 0$.

4.2. Выбор управляющей функции β_ν .

Возможны три основных выбора β_ν :

1) Положим $\beta_\nu(j) = U_\nu(j)/(1 + U_\nu^2(j))$. Это обеспечивает ортогональность $V_1 \perp W_1$ (см. лемму 3). Привлекательным моментом такого выбора является то, что β_ν получается прореживанием функции β_1 : $\beta_\nu(j) = \beta_1(2^{\nu-1}j)$.

2) $\beta_\nu(j) = \frac{1}{2}U_\nu(j)$, $\nu = 1, \dots, t$. Этот выбор предложен в [1], там же приводится его обоснование.

3) Можно при каждом ν выбирать β_ν из условия ортогональности, т.е. по формуле (42) в лемме 6.

4.3. Лифтинговая схема дает коэффициенты разложения

Утверждение 1 леммы 4 означает, что системы $\{\varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k)\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ и $\{\tilde{\varphi}_\nu(\cdot - 2^\nu k)\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ биортогональны и, значит, каждая система линейно независима. Значит подпространство $V_\nu = \mathcal{L}\{\varphi_\nu(\cdot - 2^\nu k)\}_{k=0}^{N_\nu-1}$ имеет размерность N_ν . Аналогично $\dim W_\nu = N_\nu$. Отсюда $V_{\nu+1} \dot{+} W_{\nu+1} = V_\nu$. В результате получим вейвлетное разложение пространства \mathbb{C}_N при $N = 2^t$ в прямую сумму подпространств:

$$\mathbb{C}_N = V_t \dot{+} W_t \dot{+} W_{t-1} \dot{+} \dots \dot{+} W_1.$$

Аналогичные разложения можно найти во многих работах, например [6,8]. В [6, с.53], [8] предполагается, что выполнено свойство: если $f \in V_\nu$, то $f(2\cdot) \in V_{\nu-1}$. Для наших подпространств V_ν это свойство не выполняется.

Любой сигнал $z \in \mathbb{C}_N$ разлагается в сумму

$$z(l) = \tilde{e}_t(0)\varphi_t(l) + \sum_{\nu=1}^t \sum_{k=0}^{N_\nu-1} \tilde{d}_\nu(k)\psi_\nu(l - 2^\nu k). \quad (44)$$

В биортогональной вейвлетной схеме, основанной на интерполяции дискретными сплайнами (см. раздел 5), при $\nu = t$ будет $\varphi_t(l) \equiv 1$, так что первое слагаемое в разложении (44) будет постоянным.

Коэффициенты разложения (44) получаются при многоуровневой декомпозиции сигнала z (см. п. 3.4).

Теорема 3. Векторы коэффициентов $\{\tilde{e}_t, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_2, \tilde{d}_1\}$ в разложении (44) являются обратными ДПФ от векторов $\{\tilde{E}_t, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_2, \tilde{D}_1\}$, полученных при многоуровневой декомпозиции сигнала:

$$\tilde{e}_t(0) = \tilde{E}_t(0), \quad \tilde{d}_\nu = \mathcal{F}_{N_\nu}^{-1}(\tilde{D}_\nu), \quad \nu \in 1:t.$$

Доказательство. Как было показано в теореме 1, справедливо равенство $z = z_1 + w_1$, где

$$z_1(\cdot) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \tilde{e}_1(k) \varphi_1(\cdot - 2k), \quad w_1(\cdot) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \tilde{d}_1(k) \varphi_1(\cdot - 2k).$$

Найдем ДПФ $Z_1 = \mathcal{F}_N(z_1)$. Имеем по формулам обращения ДПФ

$$\tilde{e}_1(k) = \frac{1}{N_1} \sum_{s=0}^{N_1-1} \tilde{E}_1(s) \omega_{N_1}^{ks}, \quad \varphi_1(l - 2k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj} \omega_{N_1}^{-kj} h_1(j).$$

Отсюда

$$z_1(l) = \sum_{k=0}^{N_1-1} \tilde{e}_1(k) \varphi_1(l - 2k) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N_1-1} \tilde{E}_1(s) \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj} h_1(j) \left[\frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} \omega_{N_1}^{k(s-j)} \right].$$

Выражение в скобках есть $\delta_{N_1}(s - j)$. Поэтому

$$z_1(l) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N_1-1} \tilde{E}_1(s) \left[\omega_N^{ls} h_1(s) + \omega_N^{l(s+N_1)} h_1(s + N_1) \right] = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{E}_1(j) h_1(j) \omega_N^{lj}$$

(учли, что \tilde{E}_1 имеет период N_1). Отсюда следует, что ДПФ от z_1 имеет вид $Z_1(j) = h_1(j) \tilde{E}_1(j)$.

По формуле реконструкции (41) $\tilde{E}_1(j) = h_2(j) \tilde{E}_2(j) + g_2(j) \tilde{D}_2(j)$. Отсюда

$$Z_1(j) = h_1(j) h_2(j) \tilde{E}_2(j) + h_1(j) g_2(j) \tilde{D}_2(j).$$

Введем обозначения $z_2 = \mathcal{F}_N^{-1}(h_1 h_2 \tilde{E}_2)$ и $w_2 = \mathcal{F}_N^{-1}(h_1 g_2 \tilde{D}_2)$. Получим $z_1 = z_2 + w_2$. Имеем

$$\begin{aligned} z_2(l) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h_1(j) h_2(j) \tilde{E}_2(j) \omega_N^{lj} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj} h_1(j) h_2(j) \sum_{k=0}^{N_2-1} \omega_{N_2}^{-kj} \tilde{e}_2(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{N_2-1} \tilde{e}_2(k) \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj} \omega_{N_2}^{-kj} h_1(j) h_2(j) = \sum_{k=0}^{N_2-1} \tilde{e}_2(k) \varphi_2(l - 4k). \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $w_2(l) = \sum_{k=0}^{N_2-1} \tilde{d}_2(k) \psi_2(l - 4k)$.

Далее показывается, что $Z_2(j) = \tilde{E}_2(j) h_1(j) h_2(j)$ и $z_2 = z_3 + w_3$, где $z_3 \in V_3$, $w_3 \in W_3$. В результате придем к разложению $z = z_t + w_t + \dots + w_1$, т.е. к разложению (44). •

Замечание 4. При любом $\nu \in 2 : t$ ДПФ от z_ν и w_ν даются формулами $\mathcal{F}_N(z_\nu) = H_\nu(j) \tilde{E}_\nu(j)$ и $\mathcal{F}_N(w_\nu) = G_\nu(j) \tilde{D}_\nu(j)$.

5. Биортогональная вейвлетная схема, основанная на интерполяции дискретными сплайнами

5.1. Дискретные N -периодические сплайны.

Они подробно исследованы в [4] и определяются тройкой натуральных чисел (r, m, n) , где $mn = N$. На каждом промежутке между узлами $0, n, 2n, \dots, mn = N$ сплайн $S_r(j)$ (j — целое число) совпадает с некоторым полиномом степени $2r - 1$. Выберем $n = 2$, $m = N/2$ и рассмотрим интерполяционную задачу

$$S_r(2k) = \epsilon(k), \quad k \in 0 : m - 1. \quad (47)$$

Эта задача легко решается. Всякий сплайн S_r (при $n = 2$) представляется в виде

$$\tilde{S}_r(j) = \sum_{l=0}^{m-1} c(l) Q_r(j - 2l), \quad m = \frac{N}{2},$$

где Q_r — В-сплайн (см. [4]). При указанных значениях n, m ДПФ от В-сплайна дается простой формулой (см. [4])

$$\mathcal{F}_N(Q_r)(j) := \sum_{k=0}^{N-1} Q_r(k) \omega_N^{-kj} = \left(\frac{\sin \pi j / m}{\sin \pi j / N} \right)^{2r} = \left(2 \cos \frac{j\pi}{N} \right)^{2r},$$

где $\omega_N = e^{2\pi i / N}$. Задача (47) переписывается в виде

$$\sum_{l=0}^{m-1} c(l) Q_r(2k - 2l) = \epsilon(k), \quad k \in 0 : m - 1.$$

ДПФ векторов c, e обозначим C, E : $C = \mathcal{F}_m(c)$, $E = \mathcal{F}_m(e)$. По теореме о свертке $C(j)T_r(j) = E(j)$, $j \in 0 : m - 1$, где

$$\begin{aligned} T_r(j) &:= \sum_{k=0}^{m-1} Q_r(2k)\omega_m^{-kj} = \frac{1}{2} [\mathcal{F}_N(Q_r)(j) + \mathcal{F}_N(Q_r)(j+m)] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(2 \cos \frac{j\pi}{N})^{2r} + (2 \sin \frac{j\pi}{N})^{2r} \right]. \end{aligned}$$

Найдем теперь значения $\sigma(k) = S_r(2k+1)$, $k \in 0 : m-1$, в нечетных точках $2k+1$. Имеем $\sigma = c * \mu$, где $\mu(k) = Q_r(2k+1)$, $k \in 0 : m-1$, причем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m(\mu)(j) &= \frac{1}{2}\omega_N^j [\mathcal{F}_N(Q_r)(j) - \mathcal{F}_N(Q_r)(j+m)] = \\ &= \frac{1}{2}\omega_N^j \left[(2 \cos \frac{j\pi}{N})^{2r} - (2 \sin \frac{j\pi}{N})^{2r} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathcal{F}_m(\sigma)(j) = C(j)\mathcal{F}_m(\mu)(j) = \frac{E(j)}{T_r(j)}\mathcal{F}_m(\mu)(j) = E(j)\omega_N^j U_1(j), \quad (48)$$

где

$$U_1(j) = \frac{(\cos \frac{j\pi}{N})^{2r} - (\sin \frac{j\pi}{N})^{2r}}{(\cos \frac{j\pi}{N})^{2r} + (\sin \frac{j\pi}{N})^{2r}}. \quad (49)$$

Отметим, что $U_1(j+m) = -U_1(j)$ и $U_1(j)$ имеет период $N = 2m$. Формулы (48) и (49) будут играть в дальнейшем существенную роль.

5.2. Прямой лифтинговый алгоритм.

После расщепления сигнала z на четный и нечетный подмассивы $e_1(k) = z(2k)$, $d_1(k) = z(2k+1)$, $k \in 0 : N_1 - 1$, будем предсказывать значения нечетного массива с помощью интерполяции дискретным N -периодическим сплайном (см. п. 5.1). Положим $\tilde{d}_1 = d_1 - \sigma$, где $\sigma(k) = S_r(2k+1)$ — значения интерполяционного сплайна S_r в нечетных точках. Удобное выражения для \tilde{d}_1 получится, если сделать ДПФ.

Найдем ДПФ $E_1 = \mathcal{F}_{N_1}(e_1)$, $D_1 = \mathcal{F}_{N_1}(d_1)$. По формуле (48) получим

$$\tilde{D}_1(j) = D_1(j) - E_1(j)\omega_N^j U_1(j), \quad j \in 0 : N_1 - 1, \quad (50)$$

где функция U_1 определена формулой (49). Формула (50) совпадает с формулой (26). Значит, пришли к интерполяционному лифтинговому алгоритму, в котором $h_1(j) = 1 + U_1(j)$. Обновление \tilde{E}_1 проводится по общей формуле (27), выведенной в разделе 3.1:

$$\tilde{E}_1(j) = E_1(j) + \beta_1(j)\omega_N^{-j}\tilde{D}_1(j), \quad j \in 0 : N_1 - 1.$$

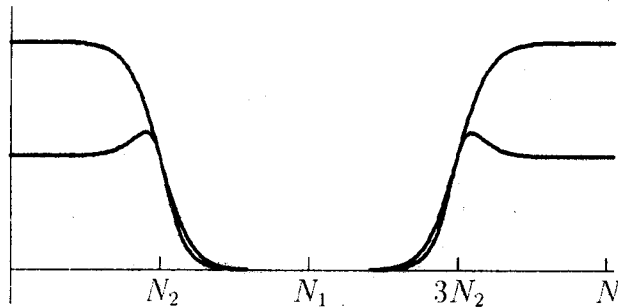
Многоуровневую декомпозицию сигнала z также можно интерпретировать в интерполяционном духе.

При указанном выборе h_1 графики функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_t$ имеют привычный вейвлетный вид, причем ψ_1 имеет самую большую частоту, а ψ_t — самую малую.

Выполним первый шаг декомпозиции, т.е. разложим сигнал z в сумму (17). ДПФ z_1 получается по формуле $Z_1(j) = h_1(j)\tilde{E}_1(j)$, где функция h_1 имеет вид

$$h_1(j) = \frac{2 \left(\cos \frac{j\pi}{N}\right)^{2r}}{\left(\cos \frac{j\pi}{N}\right)^{2r} + \left(\sin \frac{j\pi}{N}\right)^{2r}}.$$

Она является дискретным вариантом фильтра Баттерворта (см. [9, с.128]). Графики $h_1(j)$ и $\tilde{h}_1(j)$ см. на Фиг. 1.



Фиг.1. Функции $h_1(j)$ (верхний график) и $\tilde{h}_1(j)$ (нижний график) при $r = 3$. $\beta_1 = U_1/(1 + U_1^2)$.

При увеличении r график становится почти прямоугольным. Поэтому спектр $Z_1(j) = h_1(j)\tilde{E}_1(j)$ сосредоточен в $0 : N_2 - 1 \cup 3N_2 + 1 : N$, что указывает на низкочастотность сигнала z_1 .

В заключение авторы благодарят руководителей С.-Петербургского городского семинара "Вейвлеты и их приложения" Ю. К. Демьяновича, В. Н. Малоземова, М. А. Скопину за полезные обсуждения материала статьи.

Литература

1. **Zheludev V.A., Averbuch A.Z.** A biorthogonal wavelet scheme based on interpolatory splines//*Proceedings Second Int. Conf. "Tools for math. modelling'99"*. June 14-19, 1999. V.4. St. Petersburg: SPTU, 1999, P.214-231.
2. **Donoho D.L.** Interpolating wavelet transform//*Preprint 408. Dept. of Statistics. Stanford Univ., 1992.*

3. **Sweldens W.** The lifting scheme: A custom design construction of biorthogonal wavelets// *Appl. Comput. Harm. Anal.* 1996. V.3. N 2. P. 186-200.
4. **Малоземов В.Н., Певный А.Б.** Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения// *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1998. Т.38. №8. С.1235-1246.
5. **Strang G., Nguen T.** Wavelets and filter banks. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
6. **Петухов А.П.** Введение в теорию базисов всплесков. СПб: СПбГУ, 1999. 132 с.
7. **Sweldens W., Schröder P.** Building your own wavelets at home// In "Wavelets in Computer Graphics". *ACM SIGGRAPH Course Notes.* 1996.
8. **Skopina M.** Multiresolution analysis of periodic functions// *East J. on Approximations.* 1997. V.3. P.203-224.
9. **Каппелини В. и др.** Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
10. **Daubechies I.** Ten lectures on wavelets. CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math. V.61. Philadelphia: SIAM, 1992.
11. **Daubechies I., Sweldens W.** Factoring wavelet transforms into lifting steps// *J. Fourier Anal. Appl.* 1998. V.4. N 3. P. 247-269.
12. **Петухов А.П.** Биортогональные базисы всплесков с рациональными масками и их приложения// *Тр. С.-Петербург. матем. об-ва.* 1999. Т.7. С.168-193.

Summary

Zheludev V.A., Pevnyi A. B. Lifting schemes for wavelet transform of discrete signals

In this paper we present a new family of biorthogonal wavelets in the space of discrete periodic signals. We construct primal and dual algorithms for wavelet expansion of discrete signals.

Тель-Авивский университет
Сыктывкарский университет

Поступила 20.09.00