Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1.Вып.4.2001

УДК 517.987

Атомы классов множеств и векторных мер

И. И. Баженов

Вводится понятие атома семейства подмножеств некоторого множества. Понятие атома векторной меры совпадает с вводимым понятием, если рассматриваемое семейство состоит из множеств, имеющих нулевую векторную меру. В абстрактной форме исследуются свойства атомов векторной меры.

Векторной мерой будем называть счетно-аддитивную функцию множества $m : \mathcal{K} \to X$, заданную на σ-кольце $\mathcal{K}$ подмножеств некоторого множества Т и принимающую значения в топологическом векторном пространстве X. Множество $E_0 \in \mathcal{K}$ называется атомом меры m, если $m(E_0) \neq \mathbb{O}_X$ и для каждого $E \in \mathcal{A}$, $E \subset E_0$ либо $m(E) = \mathbb{O}_X$, либо $m(E) = m(E_0)$. Мера $m : \mathcal{A} \to X$ называется атомической, если она имеет хотя бы один атом, и неатомической в противном случае.

В работе [1] в абстрактной форме найдено представление атомов функции множества. В частности, показано, что сумма счетного числа скалярных положительных мер, имеющих атомы, также будет иметь атомы. Последнее утверждение, вообще говоря, неверно для векторных мер со значениями в произвольных топологических векторных пространствах. Например, сумма двух неатомических мер может быть атомической мерой и, наоборот, сумма двух атомических мер может и не иметь атомов (см. [2]).

В настоящей работе мы используем предложенный в [1] абстрактный подход к определению атома произвольной векторной меры и исследуем свойство атомичности (неатомичности) меры, принимающей значения в произведениии пространств и задаваемой соответствующими координатными функциями.

Пусть T - произвольное непустое множество и $\mathcal{K}$ - некоторое σ-кольцо подмножеств множества Т. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые нами подмножества множества T выбираются из σ-кольца $\mathcal{K}$. Ниже мы будем рассматривать различные классы подмножеств из кольца $\mathcal{K}$ и наделять их различными свойствами.

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$. Выделим следующие свойства семейства $\mathcal{N}$:

(**A**) если $E \in \mathcal{N}$, то $A \cap E \in \mathcal{N}$ для любого $A \in \mathcal{K}$;

(**B**) если $E_1, E_2 \in \mathcal{N}$ и $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{N}$;

(**C**) если $E_1 \in \mathcal{N}$ и $E_2 \notin \mathcal{N}$, причем $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $E_1 \cup E_2 \notin \mathcal{N}$;

(**D**) если $E_1, E_2 \in \mathcal{N}$ и $E_1 \cap E_2 \notin \mathcal{N}$, то $E_1 \triangle E_2 \equiv (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1) \notin \mathcal{N}$.

(**E**) $\emptyset \in \mathcal{N}$

Всюду ниже будем считать, что все рассматриваемые нами классы $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ обладают свойством (E), и не оговаривать это особо.

Класс $\mathcal{N}$ будем называть наследственным, если он обладает свойством (A), и идеалом, если обладает свойствами (A), (B).

Пусть $E \in \mathcal{K}$ и $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$. Будем обозначать $\mathcal{N}_E \equiv \{A \in \mathcal{K} : A \cap E \in \mathcal{N}\}$ и

$$\mathcal{A}(\mathcal{N}) \equiv \bigcap_{E \in \mathcal{K}} \left(\mathcal{N}_E \cup \mathcal{N}_{E^c}\right) \setminus \mathcal{N},$$

где $E^c = T \setminus E$. Элементы множества $\mathcal{A}(\mathcal{N})$ будем называть $\mathcal{N}$-атомами. Если $\mathcal{A}(\mathcal{N}) = \emptyset$, то класс $\mathcal{N}$ называем неатомическим, в противном случае $\mathcal{N}$ - атомический класс.

Легко видеть, что понятие атома векторной меры $m : \mathcal{K} \to X$ совпадает с понятием $\mathcal{N}$-атома, если в качестве семейства $\mathcal{N}$ рассматривать множества из $\mathcal{K}$, имеющие нулевую меру m, то есть $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{K} : m(E) = \mathbb{O}_X\}$. При этом, если m является скалярной положительной мерой (то есть $X = \mathbb{R}^+$), то $\mathcal{N}$ будет всегда идеалом. Но в общем случае нуль-множества $\mathcal{N}$ меры m не обладают свойством наследственности. В работе [1] исследуются атомы для случая, когда семейство $\mathcal{N}$ образует идеал в некотором кольце . В настоящей работе мы отказываемся от свойства наследственности (свойства (A)) для класса $\mathcal{N}$, однако будем требовать выполнения условий (B - D), которыми естественно обладают нуль-множества произвольной векторной меры.

Выделим вначале ряд свойств $\mathcal{N}$-атомов.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ и $E_0 \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, $E \subset E_0$. Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) если $E \notin \mathcal{N}$, то $E_0 \setminus E \in \mathcal{N}$;

(ii) если $\mathcal{N}$ обладает свойством (B) и $E \in \mathcal{N}$, то $E_0 \setminus E \notin \mathcal{N}$;

(iii) если $\mathcal{N}$ обладает свойством (C) и $E \notin \mathcal{N}$, то $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$;

(iv) если $\mathcal{N}$ обладает свойствами (B) и (C), а $E \in \mathcal{N}$, то $E_0 \setminus E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$;

(v) если $\mathcal{N}$ обладает свойствами (C),(D) и $E \in \mathcal{N}$, то $F \in \mathcal{N}_E$ для любого $F \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Если $E \notin \mathcal{N}$ и $E_0 \setminus E \notin \mathcal{N}$, то $E \cap E_0 = E \notin \mathcal{N}$ и $E^c \cap E_0 = E_0 \setminus E \notin \mathcal{N}$. Последнее противоречит тому, что E_0 является $\mathcal{N}$-атомом. Таким образом, если $E \notin \mathcal{N}$, то $E_0 \setminus E \in \mathcal{N}$ и свойство (i) выполнено.

Если $E \in \mathcal{N}$ и $E_0 \setminus E \in \mathcal{N}$, то в силу (B) $E_0 = E \cup (E_0 \setminus E) \in \mathcal{N}$, чего быть не может, так как $E_0 \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Утверждение (ii)доказано.

Проверим (iii). Если $E \notin \mathcal{A}(\mathcal{N})$, то найдется множество $A \in \mathcal{K}$ такое, что $A \cap E \notin \mathcal{N}$ и $E \setminus A = E \cap A^c \notin \mathcal{N}$. Обозначим $F = A \cap E$ и заметим, что $F \cap E_0 = A \cap E \notin \mathcal{N}$. В силу утверждения (i) $E_0 \setminus E \in \mathcal{N}$. Так как $F^c \cap E_0 = (E_0 \setminus E) \cup (E \setminus A)$ и $E_0 \setminus E \in \mathcal{N}, E \setminus A \notin \mathcal{N}$, то в силу (C) $F^c \cap E_0 \notin \mathcal{N}$. Таким образом, мы опять получили противоречие с условием $E_0 \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$, так как $F \cap E_0 = A \cap E \notin \mathcal{N}$ и $F^c \cap E_0 \notin \mathcal{N}$.

Утверждение (iv) является прямым следствием из (ii) и (iii).

Докажем свойство (v). Пусть $F \subset E$ и $F \notin \mathcal{N}$. Обозначим $E_1 = E, E_2 = E_0 \setminus F$ и заметим, что $E_1 \in \mathcal{N}$, а $E_2 \in \mathcal{N}$ в силу (i). Далее $E_1 \cap E_2 = E \setminus F \notin \mathcal{N}$. Действительно, в противном случае в силу (C) имели бы $E = F \cup (E \setminus F) \notin \mathcal{N}$. Теперь в силу свойства (D) для класса $\mathcal{N}$ приходим к выводу, что $E_1 \triangle E_2 \notin \mathcal{N}$. Но с другой стороны, $E_1 \triangle E_2 = E_0 \setminus (E \setminus F)$, где $E \setminus F \notin \mathcal{N}$. В силу (i) имеем $E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{N}$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Заметим, что если $\mathcal{N}$ является идеалом, то утверждения леммы будут выполнены без дополнительных условий на класс $\mathcal{N}$ (см.[1]).

Следующие простые примеры показывают, что условия, накладываемые на класс $\mathcal{N}$ в предыдущей лемме, являются существенными.

Пример 1. Пусть $T = \{1,2,3\}, \mathcal{K} = 2^T, \mathcal{N} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{N}) = \{\ \{2\}; \{1,2,3\}\ \}$. $\mathcal{N}$ обладает свойством (B), но свойство (C) не выполнено. Если взять в качестве $E_0 = \{1,2,3\}$ и надлежащим образом выбрать множество E, то утверждения (iii), (iv), (v) леммы 1 не будут выполнены.

Пример 2. Пусть опять $T = \{1,2,3\}, \mathcal{K} = 2^T$, а $\mathcal{N} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathcal{N}) = \{\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\ \}$. $\mathcal{N}$ удовлетворяет (B), (C), но не удовлетворяет условию (D). Утверждение (v) не выполнено, если взять $E_0 = \{1, 2, 3\}$ и $E = \{1, 2\}$.

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$. Обозначим $\mathcal{N}^* = \{E \in \mathcal{N} : E \cap F \in \mathcal{N}$ для каждого $F \in \mathcal{K}\}$. Очевидно, что $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^* \neq \emptyset$ в силу принятого нами соглашения о том, что всегда $\emptyset \in \mathcal{N}$. В частности, для любого $\mathcal{N}$ имеет место включение $\emptyset \in \mathcal{N}^*$.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$. Имеют место следующие утверждения:

a) если $\mathcal{N}$ обладает свойством (C), то $\mathcal{A}(\mathcal{N}^*) \subset \mathcal{A}(\mathcal{N})$;

б) если $\mathcal{N}$ обладает свойством (C) и (D), то $\mathcal{A}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{N}^*)$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N}^*)$, тогда $E \notin \mathcal{N}^*$ и для каждого $F \in \mathcal{K}$ либо $F \cap E \in \mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$, либо $F^c \cap E \in \mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$. Осталось показать, что $E \notin \mathcal{N}$. Пусть $E \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^*$. Тогда найдется такое множество $F \subset E$, что $F \notin \mathcal{N}$. Следовательно, в силу свойства (C) $E \setminus F \notin \mathcal{N}$. Таким образом, $F \cap E \notin \mathcal{N}^*$ и $E \cap F^c \notin \mathcal{N}^*$, что противоречит предположению о том, что E является $\mathcal{N}^*$-атомом.

Докажем второе утверждение. Пусть $E \in \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Тогда $E \notin \mathcal{N}$ и, следовательно, $E \notin \mathcal{N}^*$. Кроме этого для каждого $F \in \mathcal{K}$ либо $F \cap E \notin \mathcal{N}$, либо $E \cap F^c \notin \mathcal{N}$. Пусть $F \in \mathcal{K}$ и $F \cap E \in \mathcal{N}$, тогда в силу (v) леммы 1 $F \cap E \in \mathcal{N}^*$. Аналогично, если $E \cap F^c \notin \mathcal{N}$, то $E \cap F^c \notin \mathcal{N}^*$. Таким образом, E является $\mathcal{N}^*$-атомом.

Следствие. Если $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ удовлетворяет условиям (C) и (D), то имеет место равенство $\mathcal{A}(\mathcal{N}^*) = \mathcal{A}(\mathcal{N})$.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ два произвольных семейства множеств из $\mathcal{K}$. В силу принятого нами соглашения (условие E) $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$, так как $\emptyset \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. В дальнейшем нас будет интересовать структура $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-атомов.

Следующее утверждение содержит ряд полезных свойств и доказывается несложно.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{K}$. Тогда

a) если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ одновременно удовлетворяют одному из условий (A), (B), (C) или (D), то этому условию будет удовлетворять и семейство $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

b) семейства $\mathcal{M}^*$ и $\mathcal{N}^*$ всегда удовлетворяют условию (A), то есть являются наследственными,

c) имеет место равенство $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*$,

d) если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ удовлетворяют условиям (C) и (D), то $\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*)$.

Определение. Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ и $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Множество E будем называть $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-разложимым, если найдется множество $F \in \mathcal{K}$ такое, что $E \cap F \notin \mathcal{M}$ и $E \cap F^c \notin \mathcal{N}$. В противном случае будем говорить, что множество $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N})$ является $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-неразложимым.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ и $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N})$. Для того чтобы $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$, необходимо и достаточно, чтобы E было $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-неразложимым.

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$, тогда для любого $F \in \mathcal{K}$ либо $E \cap F \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, либо $E \cap F^c \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ и E, очевидно, является $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-неразложимым.

Обратно, пусть $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N})$ и E является $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-неразложимым. Покажем, что $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$. Так как $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N})$, то $E \notin \mathcal{M}$ и $E \notin \mathcal{N}$. Следовательно, $E \notin \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

Пусть $F \in \mathcal{K}$ и $F \cap E \in \mathcal{M}$. Если $F \cap E \in \mathcal{N}$, то $F \cap E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Если же $F \cap E \notin \mathcal{N}$, то в силу (i) леммы 1 $E \cap F^c \in \mathcal{N}$. С другой стороны, в силу $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-неразложимости множества E имеем $E \cap F^c \in \mathcal{M}$ и, стало быть, $E \cap F^c \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

Если $F \cap E \notin \mathcal{M}$, то, рассуждая аналогично, приходим к выводу, что $E \cap F^c \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Таким образом, множество E является $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-атомом.

Лемма 5. Если классы $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ удовлетворяют условию (B), а множество $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N})$ является $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-неразложимым, то $\mathcal{N}_E = \mathcal{M}_E$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{N}_E$, то есть $F \cap E \in \mathcal{N}$. Тогда в силу (ii) леммы 1 $E \setminus (F \cap E) = E \cap F^c \notin \mathcal{N}$. Так как E является $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-неразложимым, то $E \cap F \in \mathcal{M}$, то есть $F \in \mathcal{M}_E$ и $\mathcal{N}_E \subset \mathcal{M}_E$. Обратное включение верно в силу полной симметрии в рассуждениях относительно семейств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Формулировка следующего утверждения приведена в [1].

Лемма 6. Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{K}$ и $\mathcal{N}$ – наследственный класс. Тогда

(i) $\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$,

(ii) $\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \cap \mathcal{N} = \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{N}$.

Отметим, что свойство наследственности (условие A), накладываемое на семейство $\mathcal{N}$ в последнем утверждении, является существенным. Это показывает следующий простой пример.

Пример 3. Пусть $T = \{1,2\}$, $\mathcal{K} = 2^T$, $\mathcal{M} = \{\ \{2\}, \emptyset\ \}$, $\mathcal{N} = \{\ \{1,2\}, \emptyset\ \}$. Тогда $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \{\ \{1\}, \{1,2\}\ \}$, $\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \{\ \{1\}, \{2\}\ \}$, $\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{N} = \{\ \{1,2\}\ \}$ и $\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \cap \mathcal{N} = \emptyset$.

Лемма 7. Для произвольных семейств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ из $\mathcal{K}$ имеет место включение $\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \subset (\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cup \mathcal{M}) \cap (\mathcal{A}(\mathcal{N}) \cup \mathcal{N})$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$, тогда $E \notin \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Если $E \notin \mathcal{M}$, то $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M})$, так как для каждого $F \in \mathcal{K}$ либо $F \cap E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, либо $F^c \cap E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Если же $E \in \mathcal{M}$, то, очевидно, $E \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cup \mathcal{M}$. Аналогичное рассуждение может быть проведено и относительно семейства $\mathcal{N}$. Таким образом, $E \in (\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cup \mathcal{M}) \cap (\mathcal{A}(\mathcal{N}) \cup \mathcal{N})$ и лемма доказана.

Правую часть доказанного в последней лемме включения можно несколько упростить и записать в другом виде: $(\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cup \mathcal{M}) \cap (\mathcal{A}(\mathcal{N}) \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N})) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{N}) \cap \mathcal{M}) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \cup (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$. Учитывая, что $(\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{N}) \cap (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \emptyset$, результат леммы 7 может быть записан так:

$$(*) \qquad \mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \subset (\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N})) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{N}) \cap \mathcal{M}) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{N}).$$

В следующей теореме приводится полное описание семейства $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$-атомов.

Теорема. *Пусть классы множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ выбраны из элементов кольца $\mathcal{K}$ и удовлетворяют условиям (C) и (D). Пусть далее $\mathcal{M}^* = \{E \in \mathcal{M} : E \cap F \in \mathcal{M}\ \forall F \in \mathcal{K}\}$ и $\mathcal{N}^* = \{E \in \mathcal{N} : E \cap F \in \mathcal{N}\ \forall F \in \mathcal{K}\}$. Тогда имеет место следующее равенство*

$$\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \{E \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N}) : \quad E \ - \ \mathcal{M} \cap \mathcal{N} - \text{неразложимо}\} \cup$$

$$\cup (\mathcal{A}(\mathcal{N}) \cap \mathcal{M}^*) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{N}^*).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу леммы 3 $\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*)$. Далее, в силу результатов леммы 7, а точнее включения $(*)$, имеем: $\mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*) = \mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*) \cap ((\mathcal{A}(\mathcal{M}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N}^*)) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{M}^*) \cap \mathcal{N}^*) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{N}^*) \cap \mathcal{M}^*)) = (\mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{M}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N}^*)) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{M}^*) \cap \mathcal{N}^*) \cup (\mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N}^*) \cap \mathcal{M}^*)$.

Рассмотрим отдельно каждое из трех семейств, представленных в последнем объединении. Первое семейство в силу результатов леммы 2 и леммы 4 может быть записано в следующем виде:

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{M}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N}^*) = \mathcal{A}(\mathcal{N} \cap \mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N}) =$$

$$= \{E \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N}) : \quad E \ - \ \mathcal{M} \cap \mathcal{N} - \text{неразложимо}\}.$$

Упростим второе семейство. Используем свойство наследственности классов $\mathcal{M}^*$ и $\mathcal{N}^*$, а также результат леммы 6. Получим $\mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{M}^*) \cap \mathcal{N}^* = \mathcal{A}(\mathcal{M}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{M}^*) \cap \mathcal{N}^* = \mathcal{A}(\mathcal{M}^*) \cap \mathcal{N}^* = \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{N}^*$.

Совершенно аналогично поступаем с последним классом в объединении: $\mathcal{A}(\mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*) \cap \mathcal{A}(\mathcal{N}^*) \cap \mathcal{M}^* = \mathcal{A}(\mathcal{N}) \cap \mathcal{M}^*$.

Таким образом, требуемое равенство получено.

Полученное в теореме представление $\mathcal{M}\cap\mathcal{M}$-атомов позволяет описать атомы векторной меры, принимающей значения в некотором декартовом произведении топологических векторных пространств и представляющей собой две координатные функции со значениями в соответствующих пространствах.

Пусть $(T, \mathcal{K})$ – измеримое пространство, $m : \mathcal{K} \to X$ и $n : \mathcal{K} \to Y$ – две векторные меры, заданные на σ-кольце $\mathcal{K}$ и принимающие значения в топологических векторных пространствах X и Y, соответственно. Пусть, далее, $\nu : \mathcal{K} \to X \times Y$ – векторная мера, задаваемая формулой $\nu(E) = (m(E), n(E))$, $E \in \mathcal{K}$. Представляет интерес вопрос о наличии атомов у построенной меры ν, в зависимости от того, есть ли атомы у координатных векторных мер m и n.

Обозначим $\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{K} : m(E) = \mathbb{O}_X\}$ и $\mathcal{N} = \{E \in \mathcal{K} : n(E) = \mathbb{O}_Y\}$. Тогда $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{E \in \mathcal{K} : m(E) = \mathbb{O}_X$ и $n(E) = \mathbb{O}_Y\} = \{E \in \mathcal{K} : \nu(E) = \mathbb{O}_{X\times Y}\}$. Понятно, что $\mathcal{A}(\mathcal{M})$, $\mathcal{A}(\mathcal{N})$, $\mathcal{A}(\mathcal{M}\cap\mathcal{N})$ образуют семейства атомов векторных мер m, n и ν, соответственно. Из последней теоремы следует, что если координатные меры m и n не имеют атомов, то есть $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{A}(\mathcal{N}) = \emptyset$, то мера ν не может иметь атомов ($\mathcal{A}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \emptyset$). Далее, если $E \in \mathcal{K}$ является атомом меры ν, то он обязательно является атомом меры m или меры n, или, наконец, общим атомом для обеих мер. При этом теорема полностью описывает каждый из этих случаев. Однако теорема не дает ответа на следующий вопрос: если хотя бы одна из координатных мер имеет атомы, будет ли атомической рассматриваемая выше конструкция?

Следующий пример показывает, что ответ на поставленный вопрос может быть отрицательным.

Пример 4. Пусть P – бесконечное и несчетное множество, $\mathcal{B}_P$ – σ-алгебра подмножеств отрезка $[0,1]$ для каждого $p \in P$. Положим $T = [0,1]^P$ и $\mathcal{K} = \bigotimes_{p\in P} \mathcal{B}_p$ – произведение σ-алгебр $\mathcal{B}_p$. Зафиксируем точку $t_0 \in T$ и определим векторные меры $m, n : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^T$, задав их формулами

$$m(E) = K_E(t), \quad t \in T,$$

$$n(E) = K_E(t_0)K_T(t) = K_E(t_0), \quad t \in T,$$

где $K_E(t)$ – индикатор множества $E \in \mathcal{K}$. Мера n имеет атомом множество T, а мера m является неатомической. Мера $\nu(E) = (m(E), n(E))$, $E \in \mathcal{K}$ также не имеет атомов. Таким образом, хотя координатная мера m является атомической, мера ν является неатомической.

Приведенный выше пример является модификацией примера 2 из [2]. В этой же работе показано, что если координатные меры m и n принимают свои значения в нормированных пространствах, то неатомичность меры $\nu = (m, n)$ влечет неатомичность каждой из координатных мер. Отметим также, что в статье [1] в абстрактной форме получен аналогичный результат для пересечения счетного семейства идеалов с одним дополнительным условием (условие счетной цепи). Насколько существенно условие наследственности (условие A), накладываемое на рассматриваемые семейства множеств в работе [1] ? Этот вопрос остается открытым.

Литература

1. **Capek P.** The atoms of a countable sum set functions // Math. Slovaca. 39.1989. №1. P.81-89.

2. **Баженов И.И.** Неатомичность некоторых конструкций из неатомических векторных мер // *Вестник Сыкт. ун-та. Сер.1. 1999. Вып.3. С.5-14.*

Summary

Bazhenov I. I. Atoms of set families and of vector measures

An abstract definition of atom of a family of sets is given. A new notion coincides with the notion of atom of vector measure if the family in question contains only sets of zero measure. Characteristics of atoms of a set measure are investigated.

Сыктывкарский университет *Поступила 15.09.2000*