

НОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕЗЕРВУАРА РАВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

А. Б. Певный., Н. В. Кожгагельдиев

Резервуар равного сопротивления подобен капле жидкости, форму которой создает поверхностное натяжение, одинаковое во всех точках поверхности капли. Резервуар строится исходя из условия, что сопротивление (натяжение) одинаково во всех точках оболочки. Выводятся новые дифференциальные уравнения для определения формы меридиана оболочки. Приводятся результаты численных расчетов.

Ключевые слова: оболочка, форма капли, резервуар.

1. Введение

Настоящая заметка является продолжением работы [1]. Рассматривается оболочка каплевидной формы, которая может служить резервуаром для нефти. Форма капли жидкости создается поверхностным натяжением, которое одинаково во всех точках поверхности капли. Оболочка также строится исходя из условия, что во всех точках сопротивление (натяжение) одинаково. Уравнения для такой оболочки выведены в монографии [2]. В данной работе верхняя часть меридиана оболочки является графиком функции $z(x)$ и непосредственно для неё выводится дифференциальное уравнение второго порядка. Это проще, чем уравнение [3]. Аналогично уравнение выводится для нижней части меридиана. Уравнения легко решаются численно методом Рунге-Кутты. Приводятся результаты расчетов для жидкостей разного удельного веса, создающих разные нагрузки на оболочку.

2. Новые уравнения для резервуара равного сопротивления

Спроектируем резервуар для нефти каплевидной формы. Вид меридиана поверхности резервуара показана на рис. 1.

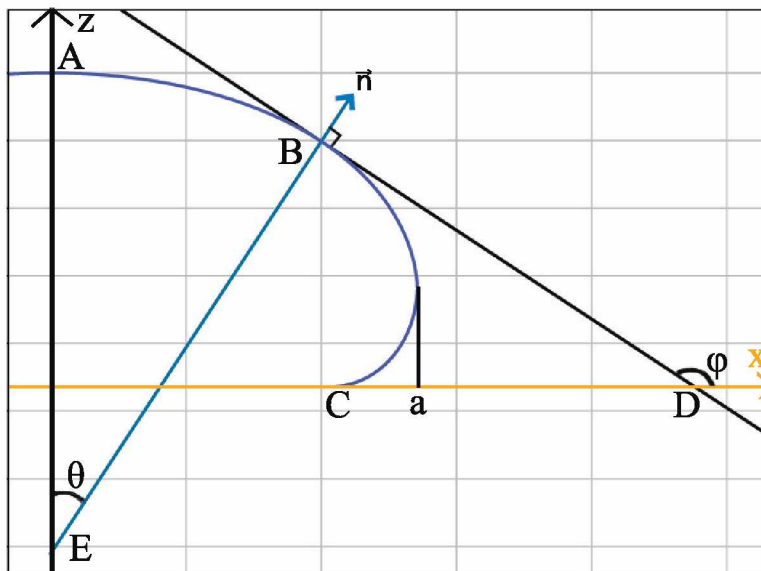


Рис. 1. Схема построения меридиана резервуара

Поверхность резервуара получается вращением меридиана ABC вокруг оси z . Если считать, что усилия во всех точках оболочки равны T_0 , то форма оболочки определяется из уравнения Лапласа

$$T_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = p_0 + \rho(H - z), \quad (1)$$

где R_1 и R_2 — радиусы кривизны оболочки, p_0 — давление в верхней точке A, ρ — удельный вес жидкости, H — высота резервуара ($H = OA$).

Используем криволинейную координату θ , где θ — угол между нормалью к меридиану и положительным направлением оси z .

Пусть верхняя часть меридиана — это график функции $z(x)$. Пусть $B(x; z)$ — точка на графике. Тогда $z'(x)$ равна тангенсу угла наклона касательной BD :

$$z'(x) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Легко видеть, что $\theta + \varphi = \pi$, поэтому

$$z'(x) = \operatorname{tg}(\pi - \theta) = -\operatorname{tg}(\theta).$$

В [1, с. 112] пропущен знак $-$ перед $\operatorname{tg}\theta$. В [1, с. 112] указана важная формула

$$x = R_2 \sin \theta,$$

которая следует из формулы Кодацци – Гаусса для поверхностей вращения. Значит, радиус кривизны $R_2 = BE$, а отрезок BE получается продолжением нормали \vec{n} до пересечения с осью z . Получаем $1/R_2 = (\sin \theta)/x$.

Выразим $\sin \theta$ через $\operatorname{tg}\theta$:

$$\sin \theta = \operatorname{tg}\theta \cos \theta = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}, \quad (2)$$

где знак $+$ при $0 \leq \theta \leq \pi/2$ и знак $-$ при $\pi/2 < \theta \leq \pi$. Отсюда

$$\frac{1}{R_2} = \frac{-z'}{x\sqrt{1 + (z')^2}}.$$

По формулам для кривизны кривой имеем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{|z''(x)|}{\left(\sqrt{1 + (z')^2}\right)^3}. \quad (3)$$

Функция $z(x)$ убывающая и выпуклая вверх, поэтому $z'(x) \leq 0$ и $z''(x) \leq 0$ для верхней части оболочки, причем $z'(0) = 0$.

$$T_0 \left(\frac{-z''}{\left(\sqrt{1 + (z')^2}\right)^3} + \frac{-z'}{x\sqrt{1 + (z')^2}} \right) = p_0 + \rho(H - z). \quad (3')$$

Умножим на $-1/T_0$ и положим $\alpha = p_0/T_0$, $\beta = \rho/T_0$. Получим дифференциальное уравнение

$$z'' = \frac{z'(x)}{x}(1 + (z')^2) - (\alpha + \beta(H - z))(\sqrt{1 + (z')^2})^3. \quad (4)$$

Особенность при $x = 0$ является устранимой, ибо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{z'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z''(x)}{1} = z''(0) = -1/R_1 \text{ (по формуле (3)).}$$

Для численного решения (4) введём функцию $y(x) = z'(x)$ и будем решать систему

$$\begin{cases} y' = F(x, y, z), \\ z' = y \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 0, z(0) = H$, где при $x > 0$.

$$F(x, y, z) = -\frac{y}{x}(1 + y^2)(\alpha + \beta(H - z))(\sqrt{1 + y^2})^3.$$

В начале метода Рунге-Кутты нужно вычислить $F(0, 0, H)$. Эта величина будет равна

$$F(0, 0, H) = \frac{1}{R_1} - \alpha.$$

Пусть $P(a, b)$ — крайне правая точка оболочки. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} y(x) = \lim_{x \rightarrow a} z'(x) = -\infty$. Вычисления в методе Рунге-Кутты следует закончить, когда $|y| < M$, где M — большое число, например $M = 100$.

3. Уравнение нижней части меридиана

Нижняя часть меридиана задаётся функцией $z_1(x)$. Для неё $z_1'(x) \geq 0, z_1''(x) \geq 0$. Поэтому в формуле для R_1 будет знак «плюс»:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{z_1''(x)}{(1 + (z_1')^2)^{3/2}}.$$

Для нижней части меридиана угол $\theta \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, поэтому в формуле (2) будет знак «минус», а в формуле для R_2 — знак «плюс»:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{z_1'(x)}{x\sqrt{1 + (z_1')^2}}.$$

Уравнение для z_1 примет вид

$$\frac{z_1''(x)}{(1 + (z_1')^2)^{3/2}} + \frac{z_1'(x)}{x\sqrt{1 + (z_1')^2}} = \alpha + \beta(H - z_1).$$

Решение этого уравнения находилось методом Рунге-Кутты, начиная с правой точки $P(a, b)$. В этой точке ставились условия $z_1(a) = b, z_1(a)' = M$. Вычисления проводятся, пока $z_1' > \varepsilon$, где ε — точность, например $\varepsilon = 0.01$.

4. Контрольный пример

Выясним, при каких условиях оболочка будет сферической. Положим $R = H/2$. Верхняя часть меридиана — это график

$$z = R + \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Для проведения численного эксперимента была написана программа на языке Python [4]. Примеры расчета приведены на рис. 2, 3. Так для сферы на рис. 2 радиусы кривизны R_1 и R_2 совпадают с радиусом сферы: $R_1 = R_2 = R$. В левой части уравнения (3') стоит выражение

$$\frac{-z''(x)}{(\sqrt{1+(z')^2})^3} + \frac{-z'(x)}{x\sqrt{1+(z')^2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} = \alpha.$$

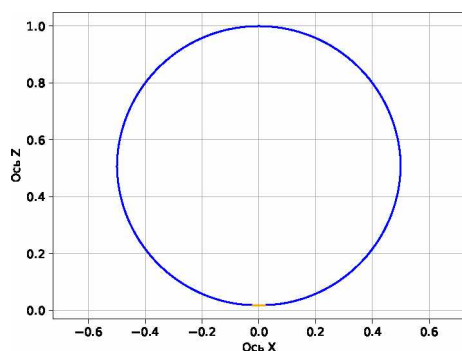


Рис. 2. Пример при $\beta = 0$

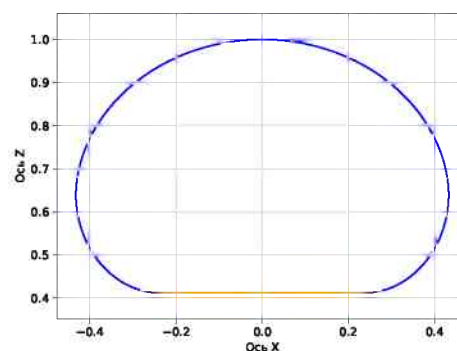


Рис. 3. Пример при $\beta = 5$

Сфера получается при $\alpha = 2/R = 4/H$, $\beta = 0$. При увеличении β сфера раздается вширь и принимает форму капли (см. рис. 3).

Список литературы

1. Ермоленко А. В., Кожгаельдиев Н. В. Графоаналитический метод расчета резервуара равного сопротивления // *Вестник Сыктывкарского университета Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 2 (35). С. 85–91.*
2. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. *Линейная теория тонких оболочек.* Л: Политехника, 1991. 656 с.

3. **Гордон Дж.** Конструкции, или Почему не ломаются вещи. М.: Мир, 1980. 390 с.
4. **Ермоленко А. В., Осипов К. С.** О применении библиотек Python для расчета пластин // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4 (33). С. 86–95.*

Summary

Pevnyi A. B., Kozhagel'diev N. V. New equations for a reservoir of equal resistance

New equations for the shape of equal resistance reservoir are obtained. The reservoir has the shape of a drop. The results of computer experiments are given.

Keywords: shell, droplet form, reservoir.

References

1. **Yermolenko A. V., Kozhagel'diev N. V.** Graphoanalytical method for calculating an equal resistance reservoir, *Vestnik Syktyvkarского университета Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2020, 2 (35), pp. 85–91.
2. **Novozhilov V. V., Chernyh K. F., Mihajlovskij E. I.** *Linejnaya teoriya tonkih oboochek* [Linear theory of thin shells], L: Politekhnik, 1991, 656 p.
3. **Gordon J.** *Konstrukcii, ili Pochemu ne lomayutsya veshchi* [Structure, or why things do not break], M: Mir, 1980, 390 p.
4. **Yermolenko A. V., Osipov K. S.** On using Python libraries to calculate plates, *Vestnik Syktyvkarского университета Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2019, 4 (33), pp. 86–95.

Для цитирования: Певный А. Б., Кожгельдиев Н. В. Новые уравнения для резервуара равного сопротивления // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 2 (39). С. 78–84. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_78*

For citation: Pevnyi A. B., Kozhagel'diev N. V. New equations for a reservoir of equal resistance, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, 2 (39), pp. 78-84. DOI: 10.34130/1992-2752_2021_2_78

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 21.05.2021