МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (34). 2020

УДК 533.72

РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ СКОРОСТЕЙ

Е. А. Латухина, В. Н. Попов

Методом дискретных скоростей построено решение задачи о течении Пуазейля в плоском канале с бесконечными параллельными стенками. В качестве основного уравнения использована ЭС (эллипсоидально-статистическая) модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на стенках канала – модель зеркально-диффузного отражения Максвелла. Вычислены удельные (приходящиеся на единицу ширины канала) потоки тепла и массы газа. Проведено сравнение с аналогичными результатами, представленными в открытой печати.
Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, модель зеркально-диффузного отражения, метод дискретных скоростей.

Введение

Описание течений разреженного газа на основе кинетического уравнения Больцмана представляет собой достаточно сложную вычислительную задачу, требующую значительных ресурсов, как в плане оперативной памяти, так и процессорного времени [1]. С учетом этого при решении задач, связанных с описанием течений разреженного газа в рамках кинетического подхода, стоящий в правой части уравнения Больцмана интеграл столкновений часто заменяют более простым с математической точки зрения выражением. Основное требование к такой замене состоит в том, что при этом должны сохраняться основные свойства больцмановского оператора столкновений, т. е. должны выполняться законы сохранения числа частиц, импульса и энергии и неуклонное стремление к равновесному состоянию [2]. Полученное таким образом уравнение рассматривается как модель кинетического уравнения Больцмана. К настоящему времени разработано много различных модельных кинетических уравнений. Наиболее популярными из них являются BGK (Бхатнагар, Гросс, Крук) — модель кинетического уравнения Больцмана, эллипсоидально-статистическая модель (ES), модельное уравнение Шахова (S-модель), а также модельные уравнения с частотой, зависящей от молекулярной скорости [3; 4].

Для решения задач кинетической теории разреженного газа с использованием модельных уравнений предложено значительное число различных методов и их вариаций [5]. Среди них можно выделить метод дискретных скоростей [6–10], который подразумевает при решении кинетического уравнения фиксированный набор доступных молекулярных скоростей, а для вычисления интеграла столкновений используется соответствующим образом подобранная квадратурная формула. В [8–10] метод дискретных скоростей применялся для описания процессов переноса в каналах с бесконечными параллельными стенками и использованием BGK-, CES-моделей, а также линеаризованного уравнения Больцмана для молекул-жестких сфер. Цель представленной работы заключалась в построении с использованием метода дискретных скоростей эллипсоидально-статистического модельного уравнения задачи о течении Пуазейля (задачи о течении разреженного газа в плоском канале с бесконечными параллельными стенками под воздействием параллельного стенкам канала градиента давления). В качестве граничного условия на стенках канала в работе использована модель зеркально-диффузного отражения Максвелла [2].

Постановка задачи. Построение функции распределения

Рассмотрим течение разреженного газа в плоском канале, стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm a'$ прямоугольной декартовой системы координат. Предположим, что в канале поддерживается постоянный, малый по величине градиент давления. Направив ось Oz'

в сторону, противоположную градиенту давления, запишем в выбранной системе координат ЭС модель кинетического уравнения Больцмана [11]:

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{2}{3}\,\frac{p}{\eta_g}(\Phi_{eq} - f). \qquad (1)$$

Здесь $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ — функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, p и η_g — давление и коэффициент динамической вязкости газа, $\mathbf{v}$ — скорости молекул газа, $\Phi_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесный анизотропный максвеллиан [11], $\mathbf{r}'$ — размерный радиус-вектор.

Решение (1) ищем в линеаризованном виде. В этом случае можем записать

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z)\beta^{3/2}\pi^{-3/2}\,\exp(-C^2)\,\left[1 + 2C_z G_n\, Z(x, C_x)\right]. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\,\mathbf{v}$ и $G_n = (1/p)dp/dz$ – безразмерные скорость молекул газа и градиент давления в направлении оси Oz'; $\beta = m/2k_BT$; m – масса молекул газа; k_B – постоянная Больцмана; T – температура газа; $Z(x, C_x)$ – линейная поправка к локально-равновесной функции распределения; $x = 2x'/3l_g$ и $z = 2z'/3l_g$ – безразмерные координаты; $l_g = \eta_g\,\beta^{-1/2}/p$.

Подставляя (2) в (1) и линеаризуя $\Phi_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ относительно локально-равновесного максвеллиана, приходим к уравнению для нахождения $Z(x, \mu)$

$$\mu\frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x,\mu) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)[1 - \mu\tau]\, Z(x,\tau)\, d\tau, \qquad \mu = C_x. \quad (3)$$

Решение (3) ищем в виде

$$Z(x,\mu) = \frac{1}{2}\left[\gamma(x^2 - a^2) - 2x\mu + 2\mu^2 - 2Y(x,\mu)\right], \qquad \gamma = 3/2. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), для нахождения $Y(x,\mu)$ приходим к однородному уравнению

$$\mu\frac{\partial Y}{\partial x} + Y(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)[1 - \mu\tau]\, Y(x,\tau)\, d\tau. \qquad (5)$$

Решение (5) ищем в виде разложения по спектральному параметру η:

$$Y_\eta(x,\mu) = \varphi(\eta,\mu)\,\exp(-x/\eta), \tag{6}$$

где функция $\psi(\eta,\mu)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)\varphi(\eta,\tau)\,d\tau = 1. \tag{7}$$

Непосредственной подстановкой (6) в (5) с учетом нормировочного интеграла (7) можно убедиться, что

$$\varphi(\eta,\mu) = \frac{\eta}{\eta-\mu}. \tag{8}$$

При таком выборе $\psi(\eta,\mu)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)\tau\,Y_\eta(x,\tau)\,d\tau = 0.$$

Таким образом, для определения значений спектрального параметра η приходим к уравнению

$$-\frac{\mu}{\eta}\,\varphi(\eta,\mu) + \varphi(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)\,\varphi(\eta,\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Здесь $\mu \in (-\infty;+\infty)$. Заметим далее, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)\,\varphi(\eta,\tau)\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-\tau^2)\,\left[\varphi(\eta,\tau)+\varphi(\eta,-\tau)\right]\,d\tau.$$

С учетом этого перепишем уравнение (9) в виде двух

$$-\frac{\mu}{\eta}\,\varphi(\eta,\mu) + \varphi(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-\tau^2)\,\left[\varphi(\eta,\tau)+\varphi(\eta,-\tau)\right]\,d\tau, \tag{10}$$

$$\frac{\mu}{\eta}\,\varphi(\eta,-\mu) + \varphi(\eta,-\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-\tau^2)\,\left[\varphi(\eta,\tau)+\varphi(\eta,-\tau)\right]\,d\tau. \tag{11}$$

При записи (11) в (10) произвели замену $\mu \to -\mu$. Теперь оба уравнения определены при $\mu \in (0; +\infty)$. Введем на действительной положительной полуоси сетку с равномерным шагом, положив $\mu_i = ih$ ($i = \overline{1, N}$, а интегралы в правых частях (10) и (11) аппроксимируем квадратичной формулой Ньютона – Котеса по шести узлам. В этом случае от (10) и (11) переходим к сеточным уравнениям

$$-\frac{\mu_i}{\eta}\,\varphi(\eta,\mu_i) + \varphi(\eta,\mu_i) = \sum_{k=1}^{N}\omega_k \Psi(\mu_k)\,\left[\varphi(\eta,\mu_k) + \varphi(\eta,-\mu_k)\right], \tag{12}$$

$$\frac{\mu_i}{\eta}\,\varphi(\eta,-\mu_i) + \varphi(\eta,-\mu_i) = \sum_{k=1}^{N}\omega_k \Psi(\mu_k)\,\left[\varphi(\eta,\mu_k) + \varphi(\eta,-\mu_k)\right]. \tag{13}$$

Здесь ω_k – весовые коэффициенты квадратурной формулы, $\omega_{m+1} = \omega_{m+6} = 19/288$, $\omega_{m+2} = \omega_{m+5} = 75/288$, $\omega_{m+3} = \omega_{m+4} = 50/288$, $m = \overline{0, n}$, $N = 6n + 1$, $\Psi(\mu_k) = \exp(-\mu_k^2)/\sqrt{\pi}$.

Введем обозначения $\mathbf{\Phi}_\pm = \{\varphi(\nu, \pm\mu_1), \varphi(\nu, \pm\mu_2), \ldots, \varphi(\nu, \pm\mu_N)\}^T$, $\mathbf{W}_{ij} = \omega_j \Psi(\mu_j)$, $\mathbf{M} = diag\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ и, следуя [7], перепишем систему уравнений (12) и (13) в матричном виде:

$$\frac{1}{\nu}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_+ = (\mathbf{I} - \mathbf{W})\mathbf{\Phi}_+ - \mathbf{W}\mathbf{\Phi}_-, \tag{14}$$

$$-\frac{1}{\nu}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_- = (\mathbf{I} - \mathbf{W})\mathbf{\Phi}_- - \mathbf{W}\mathbf{\Phi}_+. \tag{15}$$

Преобразуем полученную систему уравнений. Складывая и вычитая (14) и (15), находим

$$\frac{1}{\nu}\mathbf{M}(\mathbf{\Phi}_+ + \mathbf{\Phi}_-) = \mathbf{\Phi}_+ - \mathbf{\Phi}_-, \tag{16}$$

$$\frac{1}{\nu}\mathbf{M}(\mathbf{\Phi}_+ - \mathbf{\Phi}_-) = (\mathbf{I} - 2\mathbf{W})(\mathbf{\Phi}_+ + \mathbf{\Phi}_-). \tag{17}$$

Домножим обе части (16) слева на $1/\nu\,\mathbf{M}$. Тогда, вводя обозначение $\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}_+ + \mathbf{\Phi}_-$ и учитывая равенство (17), систему уравнений (16) и (17) перепишем в виде одного матричного уравнения:

$$(\mathbf{I} - 2\mathbf{W})\mathbf{U} = \frac{1}{\nu^2}\mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{U}. \tag{18}$$

Сведем (18) к задаче отыскания собственных значений некоторой симметричной матрицы. Для этого умножим (18) слева на некоторую диагональную матрицу $\mathbf{T}$ и перепишем полученное равенство в виде

$$\mathbf{T}(\mathbf{D} - 2\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{U} = \frac{1}{\nu^2}\mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{U},$$

или

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{V})\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}. \qquad (19)$$

Здесь ввели обозначения $\mathbf{D} = diag\{\mu_1^{-2}, \mu_2^{-2}, \ldots, \mu_N^{-2}\}$, $\mathbf{X} = \mathbf{TMU}$, $\lambda = 1/\nu^2$, $\mathbf{V} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}^{\mathbf{-1}}$ и учли коммутативность произведения диагональных матриц, входящих в полученное равенство. Выберем матрицу $\mathbf{T}$ таким образом, чтобы матрица $\mathbf{V}$ была симметрична. Непосредственные выкладки показывают, что

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_1\Psi(\mu_1)}{\mu_1^2} & \dfrac{T_1\omega_2\Psi(\mu_2)}{\mu_1\mu_2T_2} & \ldots & \dfrac{T_1\omega_N\Psi(\mu_N)}{\mu_1\mu_NT_N} \\ \dfrac{T_2\omega_1\Psi(\mu_1)}{\mu_1\mu_2T_1} & \dfrac{\omega_2\Psi(\mu_2)}{\mu_2^2} & \ldots & \dfrac{T_2\omega_N\Psi(\mu_N)}{\mu_2\mu_NT_N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{T_N\omega_1\Psi(\mu_1)}{\mu_1\mu_NT_1} & \dfrac{T_N\omega_2\Psi(\mu_2)}{\mu_2\mu_NT_2} & \ldots & \dfrac{\omega_N\Psi(\mu_N)}{\mu_N^2}. \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\mathbf{V}$ будет симметричной при выполнении условия

$$\frac{T_i\omega_j\Psi(\mu_j)}{\mu_i\mu_jT_j} = \frac{T_j\omega_i\Psi(\mu_i)}{\mu_i\mu_jT_i}.$$

Отсюда

$$\frac{T_i}{T_j} = \sqrt{\frac{\omega_i\Psi(\mu_i)}{\omega_j\Psi(\mu_j)}},$$

и матрица $\mathbf{V}$ имеет вид $\mathbf{V} = \mathbf{z}\mathbf{z}^T$, где

$$\mathbf{z}^T = \left(\frac{\sqrt{\omega_1\Psi(\mu_1)}}{\mu_1}, \frac{\sqrt{\omega_2\Psi(\mu_2)}}{\mu_2}, \ldots, \frac{\sqrt{\omega_N\Psi(\mu_N)}}{\mu_N}\right)^T,$$

а символ T означает транспонирование.

Таким образом, отыскание значений спектрального параметра ν в выражении (18) сводится к отысканию собственных значений системы уравнений (19). Так как матрица системы уравнений (19) симметрична, то ее собственные значения действительны и различны. Для их нахождения в работе использован алгоритм Хаусхолдера, который позволил перейти от симметричной матрицы к трехдиагональной. Отыскание собственных значений последней было выполнено с использованием QL-алгоритма с неявными сдвигами. Таким образом, проблема отыскания значений спектрального параметра решена.

С учетом найденных значений спектрального параметра $\nu_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$ решения уравнений (12) и (13) запишутся в виде линейной комбинации построенных решений:

$$Y(x, \pm\mu_i) = \sum_{j=1}^{N} \left[A_j \frac{\nu_j}{\nu_j \mp \mu_i} e^{-(a+x)/\nu_j} + B \frac{\nu_j}{\nu_j \pm \mu_i} e^{-(a-x)/\nu_j} \right]. \qquad (20)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что A и $B(x \mp \mp\gamma^{-1}\mu_i)$ также являются решениями уравнений (12) и (13). Таким образом, общие решения (12) и (13) записываются в виде

$$Y(x, \pm\mu_i) = A + B(x \mp \gamma^{-1}\mu_i) + \\ + \sum_{j=1}^{N-1} \left[A_j \frac{\nu_j}{\nu_j \mp \mu_i} e^{-(a+x)/\nu_j} + B_j \frac{\nu_j}{\nu_j \pm \mu_i} e^{-(a-x)/\nu_j} \right]. \qquad (21)$$

В силу нормировочного условия (7) значения спектрального параметра стремятся к нулю при бесконечном возрастании N и, как следствие, отвечающие им частные решения в (21) не вносят вклада в $Y(x, \pm\mu_i)$. С учетом этого при записи (22) исключили из (20) частные решения, которые отвечают минимальному из найденных значений спектрального параметра.

Для нахождения неизвестных констант A, B, A_j и B_j воспользуемся граничными условиями на стенках канала. В случае использования зеркально-диффузного граничного условия Максвелла они записываются в виде

$$f^+(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}) = (1-\alpha) f^-(\mathbf{r}_s, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})) + \alpha f(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}). \qquad (22)$$

Здесь $f^+(\mathbf{r}_s, \mathbf{v})$ и $f^-(\mathbf{r}_s, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v}))$ – функции распределения молекул, отраженных от стенок канала и падающих на нее, $\mathbf{r}_s$ – радиус-вектор точек стенок канала, α – коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала, $\mathbf{n}$ – вектор нормали к стенкам канала, направленный в сторону газа. Учитывая (2), (4) и (22) граничные условия для функции $Y(x,\mu)$ записываются в виде:

– на нижней стенке канала:

$$-2Y(-a,\mu)+2a\mu+2\mu^2=(1-\alpha)[-2Y(-a,-\mu)-2a\mu+2\mu^2],\ \mu>0, \quad (23)$$

– на верхней стенке канала:

$$-2Y(a,-\mu)+2a\mu+2\mu^2=(1-\alpha)[-2Y(a,-\mu)-2a\mu+2\mu^2], \qquad \mu>0. \quad (24)$$

Подставляя (23) и (24) в граничные условия (21), после преобразований приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных констант A, B, A_j и B_j:

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left\{M_{ij}A_j+N_{ij}B_je^{-2a/\nu_j}\right\}+\alpha A-B[\alpha a+\mu_i(2-\alpha)]=$$
$$=\alpha\mu_i^2+a\mu_i(2-\alpha), \quad (25)$$
$$\sum_{j=1}^{N-1}\left\{M_{ij}B_j+N_{ij}A_je^{-2a/\nu_j}\right\}+\alpha A+B[\alpha a+\mu_i(2-\alpha)]=$$
$$=\alpha\mu_i^2+a\mu_i(2-\alpha). \quad (26)$$

Здесь $i=\overline{1,N}$,

$$M_{ij}=\nu_j\left[\frac{\alpha\nu_j+\mu_i(2-\alpha)}{\nu_j^2-\mu_i^2}\right], \qquad N_{ij}=\nu_j\left[\frac{\alpha\nu_j-\mu_i(2-\alpha)}{\nu_j^2-\mu_i^2}\right].$$

Для решения системы уравнений (25), (26) использован метод Гаусса с перестановкой строк. Решением системы уравнений (25), (26) завершается построение функции распределения молекул газа по координатам и скоростям.

Вычисление потоков тепла и массы газа в канале. Анализ полученных результатов

Далее, исходя из статистического смысла функции распределения находим профиль массовой скорости газа в канале $U(x)$:

$$U(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\mu)Z(x,\mu)d\mu, \quad (27)$$

а затем поток массы газа через поперечное сечение канала J_M [11]

$$J_M = -\frac{1}{2a^2}\int\limits_{-a}^{a} U(x)dx. \tag{28}$$

Подставляя в (27) и (28) полученные результаты, находим

$$U(x) = \frac{1}{2}\,\big(\gamma(x^2-a^2)+1\big) -$$

$$-\left[A + Bx + \sum_{j=1}^{N-1}\left[A_j e^{-(a+x)/\nu_j} + B_j e^{-(a-x)/\nu_j}\right]\right], \tag{29}$$

$$J_M = -\frac{1}{2a}\left(1-\frac{2}{3}\gamma a^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2a^2}\left[2Aa + \sum_{j=1}^{N-1}\nu_j(A_j+B_j)\left(1-e^{-2a/\nu_j}\right)\right]. \tag{30}$$

Аналогичным образом находим

$$q(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\mu)\left(\mu^2-\frac{1}{2}\right)Z(x,\mu)d\mu \tag{31}$$

и поток тепла J_Q [11]:

$$J_Q = -\frac{1}{2a^2}\int\limits_{-a}^{a} q(x)\,dx. \tag{32}$$

Подставляя в (31) и (32) полученные результаты, окончательно находим

$$q(x) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{N-1}\left[A_j e^{-(a+x)/\nu_j} + B_j e^{-(a-x)/\nu_j}\right], \tag{33}$$

$$J_Q = -\frac{1}{4a^2}\left[2a + \sum_{j=1}^{N-1}\nu_j(A_j+B_j)\left(1-e^{-2a/\nu_j}\right)\right]. \tag{34}$$

Результаты расчетов согласно (30) и (34) приведены в табл. 1 и 2. В таблицах таже приведены результаты, полученные с использованием S-, CES-моделей и линеаризованного уравнения Больцмана (LBE).

Таблица 1

Значения J_M

$2a$	$S\,[9]$	$CES\,[9]$	$LBE\,[12]$	$ES\,(30)$
$\alpha = 1.0$				
0.1	2.0395	1.9259	1.9301	2.22438
1.0	1.5536	1.4863	1.4863	1.62436
10.0	2.7799	2.7220	2.7220	2.80042
$\alpha = 0.5$				
0.1	4.5801	4.3156	4.3628	4.97325
1.0	3.3928	3.2959	3.3270	3.51309
10.0	4.5837	4.5285	4.5490	4.59380

Таблица 2

Значения J_Q

$2a$	$S\,[9]$	$CES\,[9]$	$LBE\,[12]$	$ES\,(34)$
$\alpha = 1.0$				
0.1	0.73268	0.79087	0.7966	0.75499
1.0	0.36546	0.40456	0.3890	0.35149
10.0	0.098147	0.093046	0.0898	0.09184
$\alpha = 0.5$				
0.1	1.4012	1.5426	1.5632	1.46187
1.0	0.49043	0.53760	0.5285	0.477426
10.0	0.087524	0.086266	0.0842	0.083764

Как видно из приведенных результатов, использованная в работе модель кинетического уравнения Больцмана, а также предложенная процедура численных расчетов приводят к корректным результатам для всего рассмотренного диапазона значений расстояния между стенками канала $2a$ и коэффициента аккомодации α.

Заключение

Итак, в работе с использованием метода дискретных скоростей построено решение задачи о течении Пуазейля. Для различных значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа и расстояния между стенками канала получены значения удельных (приходящихся на единицу ширины канала) потоков тепла и массы газа. Проведенное сравнение с аналогичными результатами, представленными в открытой печати, показало, что использованная в работе модель кинетического уравнения Больцмана, а также предложенная процедура численных расчетов приводят к корректным результатам для всего диапазона значений расстояния между стенками канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

Список литературы

1. **Клосс Ю. Ю., Мартынов Д. В., Черемисин Ф. Г.** Компьютерное моделирование и анализ технических характеристик термомолекулярных микронасосов // *Журнал технической физики. 2011. Т. 81. 7. С. 141–148.*

2. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ, 2004. 286 с.

3. **Фролова А. А.** Численное сравнение решений кинетических модельных уравнений // *Математика и Математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана: электронный журнал. 2015. Т. 6. С. 61–77.*

4. **Латышев А. В., Юшканов А. А.** Кинетические уравнения типа Вильямса и их решения. М.: МГОУ, 2004. 271 с.

5. **Bird G. A.** Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow. Oxford: Clarendon Press, 1994. 458 с.

6. **Yen S. M.** Numerical solution of the nonlinear Boltzmann equation for nonequillibrium gas flow problems // *Annual Review of Fluid Mechanics. 1984. V. 16. C. 67–97.*

7. **Barichello L. B., Siewert C. E.** A Discrete-Ordinates Solutions for Poiseuille Flow in a Plane Channel // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 1999. Vol. 50. P. 972–981.*

8. **Siewert C. E.** Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation// *European Journal of Mechanics B/Fluids, 2002. V. 21. p. 579–597.*

9. **Siewert C. E.** The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik, 2003. V. 54. p. 273–303.*

10. **Черчиньяни К.** Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.

11. **Siewert C. E., Hickey K. A.** Kinetic theory of thermal transpiration and the mechanocaloric effect: Planar flow of a rigid sphere gas with arbitrary accommodation at the surface // *Journal of Vacuum Science and Technology, 1991. V. 9. p. 158–163.*

Summary

Latukhina E. A., Popov V. N. Solution of the ellipsoidal-statistical equation in the Poiseuille flow problem using discrete velocity method

The discrete velocity method is used to construct a solution to the problem of a Poiseuille flow in a plane channel with infinite parallel walls. The ES (ellipsoidal-statistical) model of the Boltzmann kinetic equation is used as the main equation, and the Maxwell specular-diffuse reflection model is used as the boundary condition on the channel walls. The specific (per unit channel width) heat and mass flow are calculated. Comparison with similar results presented in open press is provided.
Keywords: Boltzmann kinetic equation, model kinetic equations, specular-diffuse reflection model, discrete velocity method.

References

1. **Kloss Y. Y., Martynov D. V., Cheremisin F. G.** Komp'yuternoe modelirovanie i analiz tekhnicheskih harakteristik termomolekulyarnyh mikronasosov (Computer simulation and analysis of technical characteristics of Thermomolecular micropumps), *Technical Physics*, 2011, vol. 56, 7, pp. 1040–1048.

2. **Latyshev A. V., Yushkanov A. A.** *Analiticheskie resheniya granichnyh zadach dlya kineticheskih uravnenij* (Analiticheskiye resheniya granichnykh zadach dlya kineticheskikh uravneniy), M.: MGOU, 2004, 286 p.

3. **Frolova A. A.** Chislennoe sravnenie reshenij kineticheskih model'nyh uravnenij (Chislennoe sravnenie reshenij kineticheskikh modelnykh uravnenii), *Matematika i matematicheskoe modelirovanie*, MGTU im. N.E. Baumana. Elektronnyy zhurnal, 2015, vol. 6, pp. 61–77.

4. **Latyshev A. V., Yushkanov A. A.** *Kineticheskie uravneniya tipa Vil'yamsa i ih resheniya* (Kinetic Equations of the Williams Type and Their Exact Solutions), M.: MGOU, 2004, 271 p.

5. **Bird G. A.** *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow*, Oxford: Clarendon Press, 1994, 458 p.

6. **Yen S. M.** Numerical solution of the nonlinear Boltzmann equation for nonequillibrium gas flow problems, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1984, v. 16, pp. 67–97.

7. **Barichello L. B., Siewert C. E.** A Discrete-Ordinates Solutions for Poiseuille Flow in a Plane Channel, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, 1999, vol. 50, pp. 972–981.

8. **Siewert C. E.** Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 2002, v. 21, pp. 579–597.

9. **Siewert C. E.** The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, 2003, v. 54, pp. 273–303.

10. **Cercignani C.** *Matematicheskie metody v kineticheskoj teorii gazov* (Mathematical Methods in Kinetic Theory), M.: Mir, 1973, 245 p.

11. **Siewert C. E., Hickey K. A.** Kinetic theory of thermal transpiration and the mechanocaloric effect: Planar flow of a rigid sphere gas with arbitrary accommodation at the surface, *Journal of Vacuum Science and Technology*, 1991, v. 9, pp. 158–163.

Для цитирования: Латухина Е. А., Попов В. Н. Решение эллипсоидально-статистического уравнения в задаче о течении Пуазейля методом дискретных скоростей // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1 (34). С. 8–21.*

For citation: Latukhina E. A., Popov V. N. Solution of the ellipsoidal-statistical equation in the Poiseuille flow problem using discrete velocity method, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 1 (34), pp. 8–21.

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова

Поступила 15.02.2020