МАТЕМАТИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (34). 2020*

УДК 517.518.28

ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЦ КОШИ

Н. О. Котелина, А. Б. Певный

Матрицы Коши связаны с классическим ядром Коши 1/(x+y). В работе доказывается, что обобщенные матрицы Коши положительно определены. Дается обобщение этого результата на матрицы, связанные с ядром f(x+y), где f — экспоненциально выпуклая функция, имеющая интегральное представление с положительной плотностью.

Ключевые слова: обобщенные матрицы Коши, положительная определенность.

1. Обобщенные матрицы Коши

В линейной алгебре хорошо известны матрицы Коши, которые получаются следующим образом. Возьмем положительные числа $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Матрица Коши C имеет элементы $C_{ij} = 1/(a_i + a_j)$, $i, j \in 1 : n$. Хорошо известно (см., например, [1]), что определитель матрицы Коши положителен: $\det(C) > 0$. Главные миноры матрицы Коши также положительны, поэтому матрица C положительно определена.

В статье исследуется обобщенная матрица Коши C_α с элементами

$$C_\alpha[i, j] = \frac{1}{(a_i + a_j)^\alpha}, \quad i, j \in 1 : n,$$

где α – любое положительное число. Матрица C_α положительно определена.

Доказательство. Получим интегральное представление для элементов матрицы C_α. Введем гамма-функцию Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1}\, du, \quad \alpha > 0.$$

Сделаем замену $u = yt$, где $y > 0$. Тогда

$$\frac{1}{y^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-yt} t^{\alpha-1}\, dt.$$

Положим $y = a_i + a_j$. Получим

$$C_\alpha[i,\, j] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-a_i t} e^{-a_j t} t^{\alpha-1}\, dt. \tag{1}$$

Пусть $x_1,\, \ldots,\, x_n$ — произвольные вещественные числа, среди которых хоть одно отлично от нуля. Тогда

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} C_\alpha[i,\, j] x_i x_j = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e^{-a_i t} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} e^{-a_j t} \right) t^{\alpha-1}\, dt =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e^{-a_i t} \right)^2 t^{\alpha-1}\, dt.$$

По условию $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, поэтому экспоненциальный полином

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{-a_i t}$$

отличен от тождественного нуля. Поэтому

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} C_\alpha[i,\, j] x_i x_j > 0.$$

Теорема доказана. □

При $\alpha = 1$, $a_i = i - \frac{1}{2}$ получаем, что матрица Гильберта

$$H[i,\, j] = \frac{1}{i + j - 1}, \quad i,\, j \in 1 : n,$$

положительно определена.

Замечание. В работе авторов [2] доказано более сильное утверждение. Если кроме системы точек $\{a_i\}_{i=1}^n$ возьмем систему точек $\{b_j\}_{j=1}^n$, где $0 < b_1 < \dots < b_n$, то определитель матрицы

$$\left\{ \frac{1}{(a_i + b_j)^\alpha} \right\}_{i,\,j=1}^n$$

положителен. Было бы интересно доказать это с помощью элементарной техники, как в теореме 1.

2. Обобщение теоремы 1

Пусть интервал I — это либо полуось $(0,\,\infty)$ или вся ось $(-\infty,\,\infty)$. Пусть функция $f(y)$ на I представима в виде

$$f(y) = \int_c^d e^{yt} p(t)\,dt, \quad y \in I, \tag{2}$$

где $p(t) > 0$ на $(c,\,d)$. Интервал $(c,\,d)$ может быть бесконечным. Предполагается, что интеграл (2) существует и конечен для любого $y \in I$. Функция $f(y)$ относится к разряду экспоненциально выпуклых функций (см. [2]).

При фиксированных точках $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ из I рассмотрим матрицу A с элементами

$$A_{ij} = f(a_i + a_j) = \int_c^d e^{a_i t} e^{a_j t} p(t)\,dt, \quad i,\,j \in 1:n.$$

Матрица A положительно определена.

Доказательство. Возьмем ненулевой вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда

$$(Ax,\,x) := \sum_{i,\,j=1}^n A_{ij} x_i x_j = \int_c^d \left(\sum_{i=1}^n x_i e^{a_i t} \right)^2 p(t)\,dt.$$

Как уже отмечалось выше, экспоненциальный полином $\sum_{i=1}^n x_i e^{a_i t}$ отличен от тождественного нуля. Поэтому $(Ax,\,x) > 0$.

Теорема доказана. □

Замечание. Если кроме системы $\{a_i\}$ есть система точек $b_1 < \dots < b_n$ из I, то в [2] сложным образом доказано, что определитель $\det\{f(a_i + b_j)\}_{i,\,j=1}^n$ положителен.

Функция $f(y) = e^{y^2}$ допускает представление

$$e^{y^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{yt} e^{-t^2/4}\, dt, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Для вычисления интеграла J в (3) надо использовать равенство $yt - \frac{1}{4}t^2 = -\frac{1}{4}(t-2y)^2 + y^2$. Тогда после замены $u = (t-2y)/2$, $dt = 2du$, получим

$$J = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du \cdot e^{y^2} = 2\sqrt{\pi} e^{y^2}.$$

Отсюда следует (3).

По теореме 2 матрица

$$A_{ij} = \exp\bigl((a_i + a_j)^2\bigr), \quad i, j \in 1:n,$$

положительно определена.

Список литературы

1. **Карлин С., Стадден В.** Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976. 568 с.

2. **Kotelina N. O., Pevnyi A. B.** Exponential convexity and total positivity // *Сибирские электронные математическе известия. 2020 (в печати).*

Summary

Kotelina N. O., Pevnyi A. B. Positive definiteness of generalized Cauchy matrices

Positive definiteness of matrices with entries $C_{ij} = 1/(a_i + a_j)^\alpha$ is proved for any $\alpha > 0$. Similar theorem for matrices $A_{ij} = f(a_i + a_j)$ is proved.

Keywords: generalized Cauchy matrix, positive definite matrix.

References

1. **Karlin S., Studden W.** *Chebyshevskiye sistemy i ikh primeneniye v analize i statistike* (Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics), Interscience Publ, 1966, 568 p.

2. **Kotelina N. O., Pevnyi A. B.** Exponential convexity and total positivity, *Siberian Electronic Math. Research*, 2020 (to appear). proved.

Для цитирования: Котелина Н. О., Певный А. Б. Положительная определенность обобщенных матриц Коши // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1 (34). С. 3–7.*

For citation: Kotelina N. O., Pevnyi A. B. Positive definiteness of generalized Cauchy matrices, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, 1 (34), pp. 3–7.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 14.02.2020*