

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 3 (24). 2017*

УДК 517.926, 574.5, 581.52

ОБ ИСТОРИИ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЭКОЛОГИИ

В. П. Одинец

В статье кратко изложена предыстория появления математических моделей и методов в экологии. Подробнее дана история 5 математических моделей: модель, основанная на мультифрактальном анализе, модель поглощения дождём загрязнений атмосферы, модели Лотки – Вольтерры и их развитие, модель стабильности популяции на генетическом уровне.

Ключевые слова: индекс Маргалефа, оценка Хедервари, мультифрактальный анализ, модели Лотки – Вольтерры, репрессиллятор.

Введение. Прежде чем говорить об истории ряда математических моделей в экологии, отметим, что переход к моделям начинается со сбора информации. В России экстремальные природные явления описывались в XI–XVII веках в летописях монастырей [4]. Нерегулярные метеонаблюдения (и регулярные наблюдения астрономов за Солнцем) начались в Европе во второй половине XVII века¹ после изобретения (1657) Отто фон Герике² барометра, а Галилеем³ — в 1597 году термометра, усовершенствованного в 1723 году Фаренгейтом⁴. В России регулярные метеонаблюдения начаты 1 декабря 1725 года в Петербурге. Северная экспедиция Беринга привела к открытию метеостанции в Казани в 1733 г., и год спустя, в 1734 году — в Екатеринбурге, Томске, Енисейске, Иркутске и Якутске.

Хорошо известно, что воздух, вода, и почвы являются тремя основными составляющими биосферы, и именно в их пределах развита

¹Первые 9 метеостанций, от Флоренции до Варшавы, вели наблюдения с 1654 по 1667 г.

²Отто фон Герике (Otto von Guericke: 1602–1686).

³Галилео Галилей (Galileo Galilei: 1564–1642).

⁴Немецкий ученый Габриэль–Даниэль Фаренгейт (G.–D. Fahrenheit: 1686–1736).

жизнь. В статье будут рассмотрена прежде всего история некоторых математических моделей, касающихся естественных изменений состава воздуха, воды и почв, а также и результаты антропогенного влияния на них. Заметим, что выбор рассмотренных в статье моделей достаточно субъективен, так как уже к 1980 году только библиографический указатель математических работ по экологии насчитывал 224 страницы [2]. Продиктован отчасти этот выбор выходом США из Парижского соглашения 2016 года по уменьшению выбросов вредных веществ в атмосферу⁵. Основное внимание в статье будет уделено истории тех немногих моделей и методов, которые, несмотря на их частный характер, в отличие от планетарной системы «Гей» ([18], с. 104) или моделей Форрестера⁶ [29], дают возможность взглянуть на разные стороны коэволюции⁷ человека и биосферы.

1. Первоначально первыми математическими моделями, используемыми в экологии, были модели, опирающиеся на стандартные статистические методы, включая разные виды функций распределения тех или иных признаков (факторов). Значительно позже, уже в XX веке в моделях появились множественная регрессия и многофакторный дисперсионный анализ.

С начала XIX века в моделях в экологии начинают использовать дифференциальные уравнения, прежде всего в математических моделях популяционной динамики. Типичными примерами этих моделей являются «Закон смертности» Гомперца⁸ и динамика численности некоторых популяций, предложенная в 1838 году бельгийским математиком Пьером Ферхюльстом⁹. Однако наиболее распространенным примером является экосистема «жертва–хищник» или, говоря иначе, модель Лотки – Вольтерры (о ней будет речь позже).

⁵См. ниже цитату из книги Н.Н. Моисеева [18].

⁶Джей Форрестер (Jay Wright Forrester: 1918–2016), американский ученый, в 70-х годах XX века руководил созданием моделей «Мир» по исследованию долгосрочных тенденций мирового развития. Он — один из пионеров компьютерной инженерии.

⁷Термин «коэволюция» был введен впервые в лекциях Н.В. Тимофеева – Ресовского [18, с. 119].

⁸Английский математик Бенджамин Гомперц (Benjamin Gompertz: 1779–1865) сформулировал в 1825 г. следующий принцип: общая интенсивность смертности от всех причин является суммой двух компонент, при этом возрастная компонента смертности является экспонентой.

⁹Бельгиец Пьер Ферхюльст (Pierre François Verhulst: 1804–1849) опубликовал в 1838 г. уравнение: $(dN/dt) = N(r - \alpha N)$, где N — число членов популяции в момент t , r — внутренний коэффициент роста, α — коэффициент, зависящий от внутривидовой конкуренции. В этом уравнении точка равновесия популяции (пропускная способность) будет r/α .

Сравнительно недавно к числу подходов, используемых в математических моделях в экологии, можно отнести игровой подход [25] и теоретико-групповой подход к исследованию взаимодействия экологических факторов, использующий симметрию функции выживаемости популяции [11].

С начала 2000 годов при оценке качества природных экосистем, а также антропогенной нагрузки на лотические¹⁰ экосистемы стали использовать функцию желательности Харрингтона, впервые примененную в 1965 году при оценке качества продукции [30].

Ещё одним, сравнительно новым методом, использованным в экологии, является мультифрактальный анализ, основанный на явлении самоподобия.

История этого метода прослеживается от появления в Париже в 1975 году на французском языке и её перевода в 1977 году на английский язык книги Бенуа Мандельброта¹¹ о фракталах, открывшей начало применению фракталов в физике, биологии, экономике, а с началом XXI века и в экологии (см. [16], а также [8]).

В 1980 году испанский ученый из Каталонии Рамон Маргалеф¹² [17] высказал гипотезу о том, что между видовым богатством сообщества S и его численностью N существует соотношение

$$S = N^k, \quad (1)$$

где k — индекс Маргалефа, соответствует фрактальной размерности¹³.

В работе [8] 2008 года дано развитие этой гипотезы на основе мультифрактального анализа.

2. Если речь идёт о воздействии (загрязнении) на атмосферу, то прежде всего говорят о засорении атмосферы химическими соединениями (в основном сернистым газом) и пылевом загрязнении частицами углерода (сажей)¹⁴ и тяжёлых металлов. Главный источник естественного загрязнения атмосферы — это вулканы, пожары лесов, торфяни-

¹⁰Лотические экосистемы — это реки, родники, ручьи и др. нестоячие водоёмы.

¹¹Б. Мандельброт (Benoit Mandelbrot: 1924–2010). (Подробнее см. [20], с. 323.)

¹²Р. Маргалеф (Ramon Margalef: 1919–2004). *La biosfera: entre latermodinamica y el juego*. Barcelona: Omega, 1980. (Русское издание см. [17]).

¹³Фрактальная размерность введена в 1918 г. немецким математиком Феликсом Хаусдорфом (F. Hausdorff: 1868–1942). Фрактальная размерность отрезка равна единице, а конечного числа точек — нулю. В общем случае фрактальную размерность D множества Z в d -мерном пространстве можно описать формулой: $D = -\lim \ln(N_p)/\ln(p)$, где N_p — минимальное число d -мерных шаров радиуса p , необходимых для покрытия множества Z , а предел берётся при $p \rightarrow 0$.

¹⁴См., например, [3].

ков и самовозгорание горючих сланцев, а также пылевое загрязнение в результате падения метеоритов. Главный источник антропогенного воздействия на атмосферу — это сжигание топлива (с выходом CO_2 ¹⁵) и уничтожение лесов и болот, источников кислорода.

Главными источниками изменения состава (загрязнения) водоёмов, включая мировой океан, являются оползни, цунами, а из антропогенного влияния — стоки промышленных и коммунальных предприятий, несанкционированные свалки в воду, аварии при добыче углеводородов, а также стоки с сельхозугодий. Для рек важным фактором изменений (загрязнения) является зарегулируемость стока рек, вырубка лесов вдоль рек, осушение болот и другая деятельность человека, ведущая к изменению растительного покрова планеты и её генофонда.

Проблема изменения почвенного покрова уже напрямую связана с деятельностью человека, его умением применять удобрения и ядохимикаты [23].

В нашей работе не будем касаться истории применения имитационных моделей, моделей экологического и производственного риска, моделей управления отходами, моделей экологического страхования и штрафных санкций, хотя именно они составляют сейчас большинство математических моделей, используемых в экологии (см., например, [28]).

Наконец, напомним, что понятие «экология» ныне [24, с. 15] обозначает «совокупность методов изучения взаимоотношений любого объекта с окружающей его природной средой». Здесь уместно привести цитату из книги Н.Н. Моисеева¹⁶ «Экология человечества глазами математика»: «Не будет большой ошибкой сказать, что Человек появился на Земле в тот период, когда уже начался закат биосферы. . . И вполне вероятно, что для биосферы в целом это [т. е. возвращение в биосферу огромного количества сжигаемых углеводородов], как и возможное повышение средней температуры, окажется скорее благотворным, чем вредным. Другое дело, что нам не просто к ним приспособиться» [18, с. 169].

3. Одним из первых методов по изучению изменений в атмосфере было описание извержений вулканов (см. [5], [32]). В России описанию извержений вулканов (Ключевская и Толбачинская¹⁷ горы) мы обяза-

¹⁵В 1771 г. английский священник Джозеф Пристли (Joseph Priestley: 1733–1804) открыл роль углекислого газа в дыхании растений.

¹⁶Никита Николаевич Моисеев (1917–2000) — академик АН СССР, руководитель проекта по разработке математической модели «ядерной зимы» (1983).

¹⁷Через 200 с лишним лет в сентябре 1975 года произошло Большое трещинное

ны работе [14]¹⁸ С.П. Крашенинникова (1711–1755)¹⁹. Другим описанием воздействия природы на атмосферу было описание возгорания лесов от удара молнии и самовозгорания отвалов горючих сланцев [22] академика Петра Палласа (Peter Simon Pallas: 1741–1811). Другой академик Санкт-Петербургской Академии Наук, как и П. Паллас немец по происхождению, Иоганн-Готтлиб Георги (Johann Gottlieb Georgi: 1729–1802) в 1791 году первым доказал²⁰, что горючие сланцы могут самовозгораться [9] (см. также [26]).

Причины проявления активности примерно 40 действующих вулканов на Земле пока не раскрыты. В XX веке среднее количество извержений за год было 35. Сейчас — до 40 вулканов проявляют активность в разных частях земного шара [34]. Возможно, это связано с деятельностью Солнца [1]. «Аномальное спокойствие» Солнца было отмечено, например, в 1645–1715 годах, приведшее к существенному похолоданию в Европе.

Другим примером может служить извержение вулкана Тамбора на индонезийском острове Сумбава в 1815 году, приведшее к небывало низким температурам в 1816 году, и к голоду населения в Европе и Северной Америке в 1816–1817 годах. По оценкам П. Хедервари²¹ [31], пред-

Толбачинское извержение.

¹⁸1755 года. В 1760 г. вышло сокращенное издание на французском языке, в 1764 — полный перевод на английский язык, а в 1766 г. — на немецкий, в 1770 — на голландский язык. Ещё в XVIII веке вышли новые издания на немецком и французском языках. Значение работ Крашенинникова было своеобразно оценено под конец существования СССР — в 1988 г. прах Крашенинникова был перенесен (с не существовавшего с конца XVIII века кладбища на Васильевском острове при Благовещенской церкви (8 линия, д. 67)) на Лазаревское кладбище недалеко от могилы Ломоносова, чьим предшественником на посту ректора Академического университета и инспектора академической гимназии был академик естественной истории и ботаники Степан Петрович Крашенинников. А вот как описывает Крашенинников извержение Толбачика. «В начале 1739 года в первый раз выкинуло из того места [жерла Толбачика], будто шарик огненный, которым, однако, весь лес по около лежащим горам выжгло» ([14]. Т. 1. Часть вторая, с. 173. См. рис. 1).

¹⁹Первая Камчатская вулканологическая станция АН СССР была создана в 1935 г., и её возглавил будущий патриарх вулканологии в СССР Владимир Иванович Влодавец (1893–1993).

²⁰И.-Г.Георги для доказательства того, что кислород является составной частью воздуха и вызывает самовозгорание сланцев, использовал открытие в 1772 г. элемента кислорода немецким химиком Карлом В. Шееле (Karl Wilhelm Scheele: 1742–1786), и чуть позже — английским химиком Джозефом Пристли (публикация у Пристли вышла раньше публикации Шееле), а также новую теорию окисления и горения, поддерживаемого кислородом, французского химика Лавуазье (Antoine Laurent de Lavoisier: 1743–1794).

²¹Петер Хедервари (P. Hédervári: 1931–1984) — венгерский геофизик. В его честь

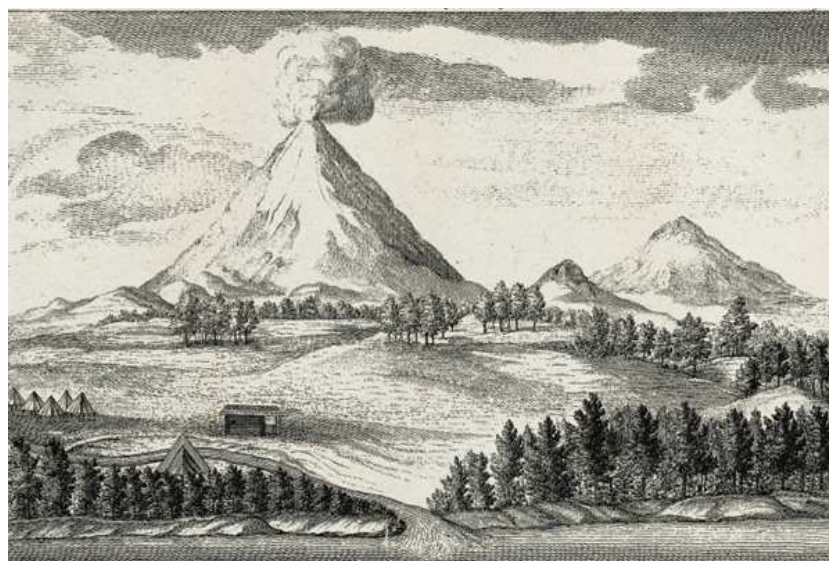


Рис. 1. Камчатская огнедышущая Гора

ложившего в 1963 году выражать энергию вулканических извержений атомно-бомбовым эквивалентом, количество атомных бомб (с энергией в $8,4 \cdot 10^{21}$ эрг каждая)²², сравнимое с энергией выброса Тамборы, равно 171428,6 штук [6, с. 55]. Эта энергия больше, чем энергия антропогенного воздействия человечества на биосферу, включая и испытания водородных бомб, за последние 300 лет. Разумеется, это не должно ставить под сомнение Парижское соглашение по уменьшению выбросов двуокси углерода, оберегая атмосферу и водоёмы от вредных веществ.

4. При анализе загрязнений в атмосфере чаще всего применяется анализ динамики временных рядов, разделяемых на ретроспективный и прогнозный. Широко используется уравнение переноса и диффузии примесей в атмосфере, статическая теоретико-игровая модель нормирования выбросов вредных веществ, при справедливом распределении ущерба от загрязнения (подробнее см. [25, с. 39–110]).

В целом, хотя при анализе загрязнений атмосферы используются, как правило, эмпирико-статистические (апостериорные) модели, но уже в модели поглощения дождём загрязняющих веществ из атмосферы, чаще используются дифференциальные уравнения.

Например, в модели «Движения» капли [19] используются два дифференциальных уравнения:

$$dh/dt = V, \quad V' = -k_1 V^2/m - k_2 V/2 + g, \quad (2)$$

назван кратер на Луне: Хедервари.

²²Это энергия бомбы, сброшенной на Хиросиму 6 августа 1945 г.

где h — высота, с которой начинается движение капли (км), V — скорость движения капли (м/с), g — скорость свободного падения, ($9,8 \text{ м/с}^2$), k_1 — коэффициент, учитывающий аэродинамическое сопротивление воздуха, k_2 — коэффициент, учитывающий силу вязкого трения, m — масса капли (кг).

Коэффициент k_1 можно определить по формуле Стокса:

$$k_1 = 6\pi\mu r, \quad (3)$$

где μ — динамическая вязкость среды, для воздуха при $T = 14 \text{ }^\circ\text{C}$ и $P = 1 \text{ атм}$, $\mu = 17,7 \cdot 10^{-3} \cdot (H \cdot c \cdot \text{м}^{-2})$, r — радиус капли (м);

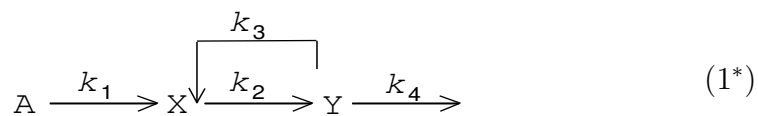
$$k_2 = cS\rho_{\text{среды}}/2, \quad (4)$$

где c — коэффициент лобового сопротивления (для шара $c = 0,3$), S — площадь поперечного сечения, ρ — плотность среды, для воздуха $\rho_{\text{возд}} = 1,29 \text{ кг/м}^3$.

Обычно решение системы дифференциальных уравнений (1) проводится численными методами, и в результате определяют скорость падения капли на разных высотах. При этом оказывается, что скорость падения капли быстро достигает насыщения. (О других методах локализации загрязнений см., например, в [3], [21].) Из работ Бёкман [3] и её коллег следует, в частности, что 95 % загрязнений в атмосфере имеют пока еще источником действия вулканов и лесных пожаров.

5. Как правило, в учебниках и пособиях по математической экологии особое место занимает экосистема «жертва–хищник», или, говоря иначе, модель Лотки – Вольтерры ([15], [7]).

В 1910 году А. Д. Лотка²³ рассмотрел схему последовательности реакций:



Здесь вторая реакция $X \rightarrow Y$ автокаталитическая²⁴. Если обозначить через « a », x , y — концентрации компонентов A , X и Y соответственно,

²³Альфред Джеймс Лотка (Alfred James Lotka: 1880–1949) — американский ученый, поляк по происхождению.

²⁴Автокаталитическая реакция играет ключевую роль в эволюционной химии, так как реакция, катализируемая собственными продуктами, получает преимущество перед реакциями, получающими катализатор (вещество, меняющее скорость реакции) извне.

то получим для схемы (1*) систему дифференциальных уравнений:

$$dx/dt = k_1a - k_2xy; \quad dy/dt = k_3xy - k_4y. \quad (1^{**})$$

Вводя обозначения:

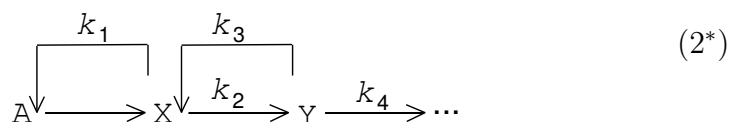
$$U = (k_1/k_4)x; \quad V = (k_2k_4y)/(k_1k_3a); \quad \tau = k_4t; \quad \alpha = k_1k_3a/k_4,$$

уравнение (1**) упростится:

$$dU/d\tau = \alpha(1 - UV), \quad dV/d\tau = UV - V. \quad (1^{***})$$

В 1925 году Альфред Лотка применил систему уравнений (1**) для моделирования схемы «жертва–хищник»²⁵.

В 1926 году итальянец Вито Вольтерра (Vito Volterra: 1860–1940) независимо от Лотки рассмотрел схему, содержащую уже две автокаталитические реакции:



Данная схема приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$dx/dt = k_1ax - k_2xy, \quad dy/dt = k_3xy - k_4y. \quad (2^{**})$$

Эта система при следующих заменах:

$$U = k_3x/k_4, \quad V = k_2y/(k_1a), \quad \tau = k_4t, \quad \alpha = k_1a/k_4, \quad (2^{***})$$

может быть сведена к системе:

$$dU/d\tau = \alpha(U - UV), \quad dV/d\tau = UV - V, \quad (2^{****})$$

которая приводится к одному уравнению:

$$dU/dV = \alpha U(1 - V)/(V(U - 1)),$$

интегрируемому в конечном виде:

$$UV^\alpha e^{-(U+\alpha V)} = const.$$

²⁵Lotka A. J. The Elements of Physical Biology. Baltimore: Williams & Wilkins Co., 1925. 460 p. (Репринт 1956 г. Но название уже несколько иное: «The Elements of Mathematical Biology». New York: Dover Publ., 1956. 465 p.)

Вито Вольтерра в [7] применил кинетическую схему $(2^*)^{26}$ для экологической схемы «жертва–хищник».

6. Дальнейшее обобщение схемы (2^*) пошло в двух направлениях. Одно, связанное с числом частиц (особей), приняло характер управляющей системы уравнений Колмогорова²⁷, описанной им в 1936 году (формально вне связи со схемами (1^*) и (2^*)).

Он предложил для изучения схемы «жертва–хищник» исследовать следующую систему двух дифференциальных уравнений:

$$dN_1/dt = k_1(N_1)N_1 - L(N_1)N_2; \quad dN_2/dt = k_2(N_1)N_2, \quad (3^*)$$

где N_1 и N_2 — соответственно концентрации жертв и хищников, k_1 и k_2 — коэффициенты размножения соответственно жертв и хищников, L — число жертв, истребляемых одним хищником в единицу времени. При этом: 1) хищники не взаимодействуют друг с другом (следовательно, действие «стаи волков» исключается);

2) прирост за малые промежутки времени числа жертв при наличии хищников равен приросту в отсутствие хищников минус число жертв, истреблённых хищниками;

3) функции $k_1(N_1)$, $k_2(N_1)$, $L(N_1)$ непрерывно дифференцируемы по N_1 ;

4) пищевые ресурсы ограничены, это означает, что коэффициент размножения жертв в отсутствие хищников монотонно убывает с возрастанием численности жертв, что можно записать как $(dk_1/dN_1) < 0$, $k_1(0) > 0 > k_1(\infty) > -\infty$;

5) $dk_2/dN_1 > 0$, $k_2(0) < 0 < k_2(\infty)$, это означает, что с ростом численности жертв коэффициент размножения хищников возрастает;

6) $L(N_1) > 0$ при $N_1 > 0$; $L(0) = 0$.

(Подробнее, см. [12], [13], [27].)

7. Другое обобщение связано с изучением экологической стабильности в популяционном моделировании. Примером может служить простейший генетический осциллятор, названный репрессилатором (см. работы [32], [10]).

Этот репрессилатор состоит из трёх элементов A_j : $j := 1, 2, 3$. При этом элемент A_3 подавляет синтез A_2 , элемент A_2 подавляет синтез A_1 , элемент A_1 , замыкая цикл, подавляет синтез A_3 . Каждый элемент A_j представляет набор из матричной рибонуклеиновой кислоты с концентрацией m_j и белка с концентрацией p_j . Эволюция во времени этих

²⁶Все обозначения в схемах (1^*) и (2^*) даны нами, следуя работе [32].

²⁷Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) — академик АН СССР, один из величайших математиков XX века.

концентраций описывается системой:

$$\dot{m}_j = -m_j + \alpha((1+(p_j)^\gamma))^{-1} + \alpha_0, \quad \dot{p}_j = \epsilon(m_j - p_j), \quad j := 1, 2, 3, \quad p_4 = p_1, \quad (4^*)$$

где α , α_0 , γ , ϵ — положительные параметры, при этом предполагается, что ϵ и α_0 достаточно малы. Тогда результатом исследования системы (4*) при $\gamma > 2$ является существование достаточно малого ϵ_0 , такого, что при всех $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ при подходящем увеличении $\alpha \gg 1$ система допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл, обладающий свойством самосимметричности.

Список литературы

1. **Абдурахманов А. И., Фирстов П. П., Широков В. А.** Возможная связь вулканических извержений с цикличностью солнечной активности // *Бюл. вулканол. станций.* № 52 (1976). С. 3–11.
2. **Багоцкий С. В., Базыкин А. Д., Монастырская Н. П.** Математические модели в экологии (Библиографический указатель отечественных работ). М.: ВИНТИ, 1981. 224 с.
3. **Wöckman C.** Hybrid regularization method for the ill-posed inversion of multiwave length lidar data to determine aerosol size distribution // *Applied Optics*, 40 (2001), pp. 1329–1342.
4. **Борисенков Е. П., Пасецкий В. М.** Экстремальные природные явления в русских летописях XI–XVII вв. Л.: Гидрометеоздат, 1983. 241 с.
5. **Bullard F. M.** Volcanoes in history, in theory, in eruption. Austin: Univ. Texas Press, 1962. 441 p.
6. **Влодавец В. И.** Вулканы Земли. М.: Наука, 1973. 169 с.
7. **Volterra V.** Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // *Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei, Ser. 2.*, 1926. Pp. 31–113.
8. **Гелашвили Д. Б., Якимов В. Н., Иудин Д. И., Дмитриев А. И., Розенберг Г. С., Солнцев Л. А.** Мультифрактальный анализ видовой структуры сообщества мелких млекопитающих Нижегородского Поволжья // *Экология.* № 6. 2008. С. 456–461.

9. **Georgi I.** Von einer feuerfangenden Ende aus der Revalischen Stadthalderschaft // *Im: «Auswahl ökonomischer Abhandlungen, welche freie Ökonomische Gesellschaft in St.-Petersburg in deutscher Sprache erhalten hat».* Dritter Band. St.-Petersburg: 1791. S. 330–331.
10. **Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.** Существование и устойчивость релаксационного цикла и математической модели репрессилатора // *Математ. заметки.* Т. 101. Вып. 1, 2017. С. 58–76.
11. **Гуламов М. И.** Теоретико-групповой подход к исследованию взаимодействия экологических факторов // *Экологическая химия.* 21 (1). 2012. С. 1–9.
12. **Kolmogorov A.** Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza // *G.Inst. Ital. Attuari,* 7, № 1, 1936. Pp. 74–80.
13. **Колмогоров А. Н.** Качественное изучение математических моделей динамики популяций // *Проблемы кибернетики.* М.: Наука, 1972. Вып. 25. С. 100–106.
14. **Крашенинников С. П.** Описание Земли Камчатки. 1755. Т. 1; Т. 2 (Репринт. Воспроизведение. СПб. : Наука, 1994. Т. 1. 440 с.; Т. 2. 320 с.).
15. **Lotka A.** F ur Theorie der periodischen Reaktionen // *Z. Physics. Chem.,* 72, (1910). S. 508–511.
16. **Mandelbrot B.** Fractals: Form, Chance and Dimension. San-Francisco: W. H. Freeman and Co., 1977. 365 p.
17. **Маргалев Р.** Облик биосферы (перевод с исп.). М.: Наука, 1992. 254 с.
18. **Моисеев Н. Н.** Экология человечества глазами математика. М.: Молодая гвардия, 1988. 255 с.
19. **Никоненко В. А., Тянтова Е. Н.** Модель поглощения дождём загрязняющих веществ из атмосферы // *Экологическая химия.* 2010. 19 (2). С. 98–104.
20. **Одинец В. П.** Зарисовки по истории компьютерных наук. Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2013. 421 с.

21. Орлов К. Г., Мингалев И. В., Мингалев В. С., Чечеткин В. М., Мингалев О. В. Численное моделирование общей циркуляции атмосферы Земли для условий зимы и лета // *Труды Кольского научного центра. Гелиогеофизика. Вып. 1. 6/2015. С. 140–145.*
22. Pallas R. S. Reise durch verschiedene Provinzen des Russisches Reiches. Teil 2. Buch 1. St.-Petersburg, 1773. S. 54–57.
23. Панников В. Д., Минеев В. Г. Почва, климат, удобрения и урожай. М.: Колос, 1977. 413 с.
24. Пегов С. А., Хомяков П. М. Моделирование развития экологических систем. СПб.: Наука, 1991. 218 с.
25. Петросян Л. А., Захаров В. В. Введение в математическую экологию. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 222 с.
26. Пихлак А.-Т. А. Заметки по истории исследования процессов самовозгорания и проблем кислорода атмосферы в Эстонии // *Экологическая химия. 2009. 18 (1). С. 31–40.*
27. Ромашев Ю. А., Скоробогатов Г. А. Детерминистское и стохастическое моделирования экосистемы (жертва–хищник), химической системы (горючее–окислитель), экономической системы (ресурсы–индустрия // *Экологическая химия. 2011. 20 (3). С. 129–149.*
28. Трифонова Т. А., Ильина М. Е. Экологический менеджмент: практические аспекты применения. Владимир: Аркаим, 2015. 362 с.
29. Форрестер Д. Мировая динамика (перевод с англ.). М.: АСТ, 2008. 384 с.
30. Harrington E. S., Jr. The Desirability Function // *Industrial Quality Control, Vol. 21, № 10, 1965. Pp. 494–498.*
31. Hedervari P. On the energy and magnitude of volcanic eruption // *Bul. volcanologiq., XXV, 1963. Pp. 373–379.*
32. Shepherd E. S. The analysis of gases obtained from volcanoes and from rocks // *J. Geol., Vol. 33, № 3, 1925.*

33. **Elovitz M. B., Leibler S.** A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // *Nature*, 403 (2000). Pp. 335–338.
34. **Ячменникова Н.** Летим сквозь пепел // *Российская газета* 28.06.2017. № 139 (7305).

Summary

Odyniec W. P. On a history of some mathematical models in ecology

The prehistory of the appearance of some mathematical models and methods in ecology is briefly reviewed. History the five mathematical models reviewed in detail: the model, which based on multifractal analysis, the model of absorption by rain of pollution of atmosphere, the Lotka–Volterra models and their development, the model of the population stability by the genetic level.

Keywords: Margalef index, Hedervari estimation, multifractal analysis, the Lotka–Volterra models, repressilator.

References

1. **Abdurakhmanov A. I., Firstov P. P., Shirokov V. A.** Vozmozhnaya svyaz' vulkanicheskikh izverzhenij s ciklichnost'yu solnechnoj aktivnosti (A possible connection of volcanic eruption and the cyclicity of the sun activity), *Bul. vulcanol. stancii*, № 52, 1976, pp. 3–11.
2. **Bagotskii S. V., Bazykin A. D., Monastyrskaya N. P.** Matematicheskie modeli v ehkologii (Mathematical models in ecology), *Bibliographicheskii ukazatel' otechestvennyh rabot*, Moscow: VINITI, 1981, 224 p.
3. **Böckman C.** Hybrid regularization method for the ill-posed inversion of multiwave length lidar data to determine aerosol size distribution, *Applied Optics*, 40 (2001), pp. 1329–1342.
4. **Borisenkov E. P., Paseckii V. M.** *Ekstremal'nye prirodnye yavleniya v russkikh letopisyah XI–XVII vv* (Extremal natural phenomena in the Russian chronicles), Leningrad: Gidrometeoizdat, 1983, 241 p.
5. **Bullard F. M.** *Volcanoes in history, in theory, in eruption*, Austin: Univ. Texas Press, 1962, 441 p.
6. **Vlodavets V. I.** *Vulkany Zemli* (Volcanoes of the Earth), Moscow: Nauka, 1973, 169 p.

7. **Volterra V.** The changes and variations in the number of a co-existing animal species, *Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei*, Ser. 2., 1926, pp. 31–113.
8. **Gelashvili D. B., Yakimov V. N., Iudin D. I., Dmitriev A. I., Rosenberg G. S., Solncev L. A.** Mul'tifraktal'nyj analiz vidovoj struktury soobshchestva melkih mlekopitayushchih Nizhegorodskogo Povolzh'ya (Multifractal analysis of species structure of company of the small mammal situated on Volga around from Nizhny Novgorod), *Ecologiya*, № 6, 2008, p. 456–461.
9. **Georgi I.** About the self-in flammable end of city dump of Revel, *In: The selection of economical work's which support for German language the Free Economical Society of St. Petersburg*, vol. 3, St. Petersburg, 1791, pp. 330–331.
10. **Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.** Sushchestvovanie i ustojchivost' relaksacionnogo cikla i matematicheskoy modeli repressilyatora (The existence and stability of a relaxation cycle and mathematical model of a repressilator), *Matemat. Zametki*, vol. 101, № 1, 2017, pp. 58–76.
11. **Gulamov M. I.** Teoretiko-grupповoj podhod k issledovaniyu vzaimodejstviya ehkologicheskikh faktorov (A Group – Theoretic Approach towards the Study in Interaction of Environmental Factors), *Ecologicheskaya khimiya*, 21 (1), 2012, pp. 1–9.
12. **Kolmogorov A. N.** The Theory by Volterra of survival struggle for existence, *G. Inst. Ital. Attuari*, 7, № 1, 1936, pp. 74–80.
13. **Kolmogorov A. N.** Kachestvennoe izuchenie matematicheskikh modelej dinamiki populyacij (Qualitative research of mathematical models of dynamics of population), *Problemy kibernetiki*, № 25, Moscow: Nauka, 1972, pp. 100–106.
14. **Krashenninnikov S. P.** *Opisanie Zemli Kamchatki* (A Description of the Land of Kamchatka), St. Petersburg: 1755, vol. 1 and vol. 2 (Reprint. Reproduction, St. Petersburg: Nauka, 1994, vol. 1, 440 p.; vol. 2, 320 p.).
15. **Lotka A.** To towards the Theory of Periodical Reactions, *Z. Physics. Chem.*, 72, (1910), pp. 508–511.

16. **Mandelbrot B.** *Fractals: Form, Chance and Dimension*, San-Francisco: W. H. Freeman and Co., 1977, 365 p.
17. **Margalef R.** *Oblik biosfery* (Our biosphere), (Transl. from Spanisz.), Moscow: Nauka, 1992, 254 p.
18. **Moiseev N. N.** *Ekologiya chelovechestva glazami matematika* (The ecology of mankind through the eyes of a mathematician), Moscow: Molodaya gvardiya, 1988, 255 p.
19. **Nikonenko V. A., Tyantova E. N.** Model' pogloshcheniya dozhdym zagryaznyayushchih veshchestv iz atmosfery (Model of absorption of pollutants from atmosphere by a rain), *Ekologicheskaya khimiya*, 2010, 19 (2), pp. 98–104.
20. **Odyniec W. P.** *Zarisovki po istorii komp'yuternyh nauk* (Sketches in the history of computer sciences), Syktyvkar: Izdatelstvo Komi GPI, 2013, 421 p.
21. **Orlov K. G., Mingalev I. V., Mingalev V. S., Chechetkin V. M., Mingalev O. V.** Chislennoe modelirovanie obshchej cirkulyacii atmosfery Zemli dlya uslovij zimy i leta (Numerical Modelling of the global circulation for of the Earth atmosphere by winter and summer conditions), *Trudy Kolskogo nauchnogo centra, Geliogeofisika*, Vyp. 1-6/2015, Apatity: Polyarnyi geofisicheskii institute, 2015, p. 140-145.
22. **Pallas R. S.** *A travel through various Provinces of the Russian Empire*, part 2, the book 2, St. Petersburg: 1773, pp. 54–57.
23. **Pannikov V. D., Mineev V. G.** *Pochva, klimat, udobreniya i urozhaj* (Soil, climate, fertilizere and harvest), Moscow: Kolos, 1977, 413 p.
24. **Pegov S. A., Khomyakov P. M.** *Modelirovanie razvitiya ehkologicheskikh sistem* (The modelling of development of ecologic systems), St. Petersburg: Nauka, 1991, 218 p.
25. **Petrosyan L. A., Zakharov V. V.** *Vvedenie v matematicheskuyu ehkologiyu* (Introduction to mathematical ecology), Leningrad: Leningrad State University Publishers, 1986, 222 p.

26. **Pihlak A.-T. A.** Zametki po istorii issledovaniya processov samovozgoraniya i problem kisloroda atmosfery v EHstonii (An overview on the history of self-ignition and air oxygen problem in Estonia), *Ecologicheskaya khimiya*, 2009, 18 (1), pp. 31–40.
27. **Romashev Yu. A., Skorobogatov G. A.** Deterministskoe i stohasticheskoe modelirovaniya ehkosistemy (zhertva–hishchnik), himicheskoy sistemy (goryuchee–okislitel’), ehkonomicheskoy sistemy (resursy–industriya) (Deterministic and stochastic modelling of the ecosystem (predator–prey), chemical system (fuel– oxidizer), economical system (resources–industry)), *Ecologicheskaya khimiya*, 20 (3), 2011, 129–149 p.
28. **Trifonova T. A., Il’ina M. E.** *Ekologicheskij menedzhment: prakticheskie aspekty primeneniya* (Ecological management: some practical aspects of application), Vladimir: ARKAIM, 2015, 362 p.
29. **Forrester J.** *Mirovaya dinamika* (World Dynamics), (Transl. from Wright-Allen Press, 1971), Moscow: AST, 2008, 384 p.
30. **Harrington E. C., Jr.** The Desirability Function, *Industrial Quality Control*, vol. 21, № 10, 1965, pp. 494–498.
31. **Hedervari P.** On the energy and magnitude of volcanic eruption, *Bul. volcanologiq.*, XXV, 1963, pp. 373–379.
32. **Shepherd E. S.** The analysis of gases obtained from volcanoes and from rocks, *J. Geol.*, vol. 33, № 3, 1925.
33. **Elovitz M. B., Leibler S.** A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators, *Nature*, 403 (2000), pp. 335–338.
34. **Yachmennikova N.** Letim skvoz’ pepel (Flying through ashes), *Rosijskaya gazeta*, № 139 (7305) from 28.06.2017.

Для цитирования: Одинец В. П. Об истории некоторых математических моделей в экологии // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 3 (24). С. 88–103.*

For citation: Odyniec W. P. On a history of some mathematical models in ecology, *Bulletin of Syktyukar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №3 (24), pp. 88–103.