

МАТЕМАТИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 3 (24). 2017*

УДК 511.0

ГЕОМЕТРИЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО: ТУПЫЕ И ОСТРЫЕ УГЛЫ В ИЗВЕСТНЫХ ТЕОРЕМАХ

Р. Р. Пименов

В статье вводится и изучается понятие «невозможная конфигурация тупых и острых углов» и его связь с теоремами о перпендикулярности на плоскости и в многомерном пространстве. Исследуются две теоремы: о пересечении высот треугольника и о проекциях, названные в статье «теорема домино». Обе теоремы обобщаются на произвольное число прямых, и обнаруживаются связанные с ними невозможные конфигурации углов. Указывается как с помощью непрерывности и метода малых шевелений из невозможности определенной конфигурации углов получать теорему о перпендикулярности прямых: прямой угол рассматривается как пограничное положение угла. Рассматриваются применение этих методов в неевклидовых геометриях и выражение их языком векторной алгебры.

Ключевые слова: перпендикулярность, непрерывность, проекция, ориентация, высота треугольника.

1. Введение

В статьях [3], [4] высказана гипотеза о связи ориентаций, определенного набором точек (на плоскости или в многомерном пространстве) с теоремами проективной геометрии о принадлежности точек одной прямой. Мы назвали эту гипотезу «принципом закулисья». Но мы не могли привести конкретные примеры его действия, поскольку в простейших теоремах проективной геометрии, например теореме Дезарга, участвует много элементов (10 точек и 10 прямых).

С другой стороны в статьях [5], [6] мы, а в [2] С. Табачников изучали геометрию, основанную на понятии перпендикулярности. Мы трактовали таким образом классические теоремы Дезарга и Паппа на плоскости, С. Табачников доказал, что любой плоской теореме проективной

геометрии о конфигурации точек и прямых отвечает теорема о перпендикулярных прямых в трехмерном пространстве. На этом основании в [5], [6] мы говорим о «Геометрии перпендикулярного».

В геометрии перпендикулярного принцип закулисы видоизменяется: вместо ориентации можно говорить о тупых или острых углах. При этом под углом мы понимаем угол в треугольнике, а не угол между двумя отдельно взятыми прямыми. Пусть нам дано какое-то конечное множество точек (на плоскости или во многомерном пространстве). Угол между любыми тремя точками может быть острым, прямым или тупым. Мы можем рассматривать и случай, когда три точки лежат на одной прямой: если вершина такого «угла» лежит между двумя другими точками, то это — тупой угол, в противном случае — острый. Таким образом, каждая конфигурация точек определяет конфигурацию тупых и острых углов между ними. Прямые углы являются границей между острыми и прямыми, и, изучая конфигурации углов, мы их не рассматриваем. Не все конфигурации углов возможны: в треугольнике в \mathbb{R}^n не может быть больше одного тупого угла, и это верно не только в евклидовой геометрии.

Невозможные конфигурации углов и связь этих конфигураций с известными теоремами о перпендикулярности и являются предметом изучения данной статьи. Принцип закулисы в геометрии перпендикулярного мы сформулируем так:

1. *Если какая-то конфигурация тупых и острых углов невозможна, то с ней связана теорема о необходимой перпендикулярности каких-то прямых.*

2. *Если существует теорема о необходимой перпендикулярности каких-либо прямых, то с ней связана теорема о невозможности какой-то конфигурации тупых и острых углов.*

Это эвристический принцип, который в статье мы будем исследовать и уточнять. Одно исключение уже было указано: в треугольнике не может быть двух тупых углов, и это не влечет никакой теоремы о перпендикулярности. Рассмотрим следующую конфигурацию углов и точек (см. рис. 1).

Для любых точки O и N точек A_i (на плоскости или в многомерном пространстве) невозможно, чтобы все $\angle OA_i A_{i+1}$ были тупыми и $\angle OA_n A_1$ также был тупым. На рис. 1 изображено 6 точек и выделены углы, которые не могут все одновременно быть тупыми. Для наглядности шестиугольник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$, изображен выпуклым, а точка O лежит внутри него. В общем случае указанный шестиугольник может быть самопересекающимся. Утверждение следует из того, что в произ-

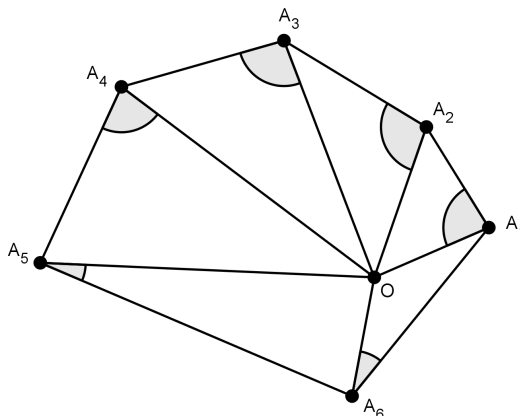


Рис. 1. Невозможная цепь тупых углов

вольном треугольнике напротив тупого угла лежит наибольшая сторона. Если все выделенные углы тупые, то для всех i $|OA_i| < |OA_{i+1}|$, а на последнем шаге $|OA_6| < |OA_1|$, что ведет к противоречию. Рассуждение пригодно и для неевклидовых геометрий. Поскольку катет также всегда короче гипотенузы, то невозможно и чтобы все $\angle OA_i A_{i+1}$ и $\angle OA_n A_1$ были прямыми.

Оказалось, что для доказательства невозможности расположения тупых углов по цепи достаточно лишь неравенства о наибольшей стороне напротив тупого угла в треугольнике. Этого же неравенства достаточно и для доказательства невозможности конфигурации на рис. 2. Невозможно, чтобы все выделенные на рис. 2 углы были тупыми или прямыми.

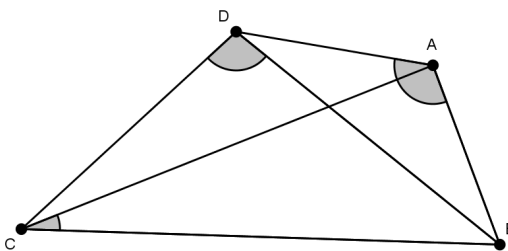


Рис. 2. Невозможный тетраэдр

Интересен вопрос: как описать все невозможные конфигурации тупых углов, невозможность которых можно доказать, используя исключительно то, что в треугольнике напротив тупого угла лежит наибольшая сторона? Мы полагаем, что это скорее комбинаторный и алгебраический вопрос, чем геометрический, и не исследуем его.

В двух приведенных примерах невозможных конфигураций принцип закулисья не работает. Мы полагаем, что невозможно связать с

этим конфигурациями какую-либо теорему о необходимости прямых углов. Почему это так, мы обсудим в разделе 5, а в разделах 3 и 4 приведем примеры его эффективной работы, связав две теоремы геометрии перпендикулярного с невозможными конфигурациями тупых и острых углов. Первой будет простая, известная, но безымянная теорема, которую мы назовем «Теоремой домино» (раздел 2). Вторая теорема — теорема о пересечении высот треугольника. Мы покажем, как из них следует невозможность определенного расположения острых и тупых углов в многоугольниках. В разделе 5 мы покажем, используя непрерывность и малые шевеления, как из невозможности конфигурации острых и тупых углов выводить теорему о перпендикулярности. В разделе 6 мы обсудим применение излагаемых идей в неевклидовых геометриях и многомерных пространствах.

2. Теорема домино о проекциях

Известен простой факт о проекциях в евклидовом пространстве: даны три прямые a , b , c , между которыми нет перпендикулярных, пересекающиеся в одной точке. Пусть произвольная точка A_1 лежит на a , спроецируем ее на b , полученную точку A_2 спроецируем на c , полученную точку A_3 — снова на a , мы получим точку A_4 . Теорема утверждает: *если мы будем проецировать точку A_1 в другом порядке: сначала на c , потом на b , потом снова на a , то мы придем в ту же самую точку A_4 .*

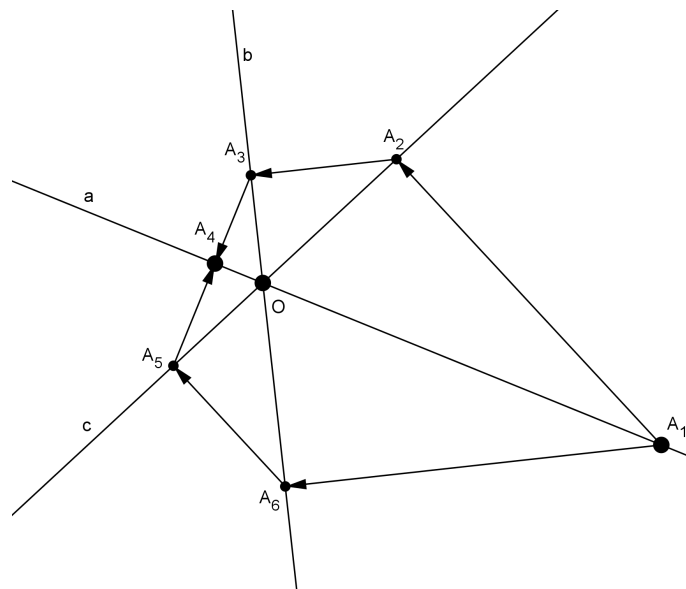


Рис. 3. Теорема домино для трех прямых

Построение изображено на рис. 3. Позднее мы объясним, почему называем эту теорему *теоремой домино*. Теорема может быть сформулирована так, что в условии участвуют лишь три элемента: прямые b и c , пересекающиеся в точке O , и точка A_1 . Проведем из данной точки перпендикуляры на данные прямые b и c . Из оснований этих перпендикуляров снова проведем перпендикуляры на те же прямые (но в другом порядке). Соединим основания проведенных перпендикуляров, полученная прямая перпендикулярна прямой, проходящей через данную точку A_1 и O — точку пересечения b и c .

Теорема домино обобщается на произвольное число прямых (между которыми нет перпендикулярных). Пусть дано n прямых, пересекающихся в одной точке. Перенумеруем их в произвольном порядке и будем проецировать произвольную точку A_1 на первой прямой на вторую прямую, затем на третью и так далее, а с последней прямой — на первую. Мы получим точку A_{n+1} . Теперь будем проецировать точку A_1 на те же прямые, но в другом порядке: с первой на последнюю, с последней на предпоследнюю и так далее, пока мы не спроецируем со второй прямой на первую. Теорема домино утверждает, что полученная в результате точка совпадает с A_{n+1} . На рис. 4 показан случай для $n=5$.

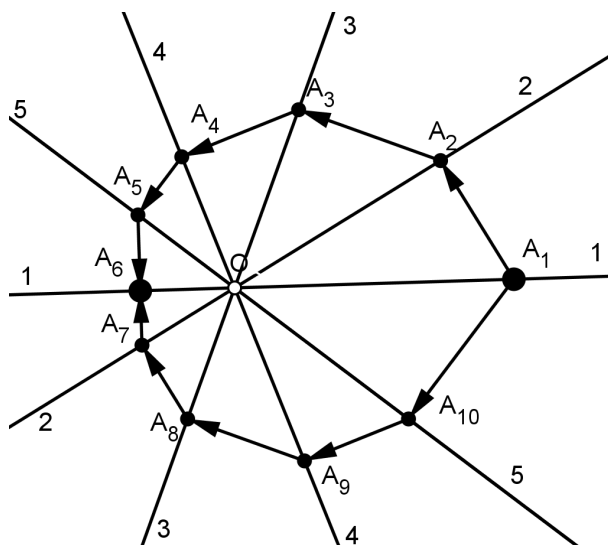


Рис. 4. Теорема домино для пяти прямых

На рис. 4 порядок нумерации прямых совпадает с порядком их обхода против часовой стрелки для ясности чертежа. На самом деле нумерация прямых может быть произвольной. Теорема домино очевидным образом обобщается на евклидово пространство произвольной размер-

ности. Мы назвали этот факт теоремой *домино*, потому что порядок обхода прямых при рассматриваемых проекциях совпадает с замкнутой цепью костяшек домино.

Доказательство теоремы домино тривиально. Обозначим прямую с номером i L_i . Подсчитаем изменение длин $|OA_i|$ при проекциях: $|OA_i| = |OA_{i-1}| \cdot \cos(\angle L_i L_{i-1})$. Поэтому, подсчитывая итоговые расстояния от точки O при последней проекции при прямом и обратном обходе данных прямых, мы получим одну и ту же величину: в произведении будут стоять косинусы тех же самых углов, но в другом порядке. Осталось показать, что и расположение итоговых точек будет совпадать. Гипотетически они могут располагаться на L_1 на одном и том же расстоянии от O , но по разные стороны. В плоском случае и для трех прямых эту возможность легко исключить из наглядных соображений, для произвольного числа прямых во многомерном евклидовом пространстве можно перейти к векторам и использовать скалярное произведение.

3. Теорема домино и углы в многоугольнике

Теорема домино удобна для применения принципа закулисы. Теперь удобнее воспользоваться другим порядком обхода точек. На рис. 3 и 4 мы стартовали с точки A_1 и опускали из нее перпендикуляры, возводя следующий перпендикуляр из основания предыдущего. Теорема домино утверждает, что при прямом и обратном обходе данных прямых (композиции проекций) мы придем в одну и ту же точку. Мы можем стартовать из финишной точки, в этом случае построение также замыкается (в первой точке). Из финишной точки мы не опускаем перпендикуляры на следующую прямую, а проводим перпендикуляр на текущую (ту прямую, на которой лежит точка) до пересечения со следующей прямой. То же самое делаем с полученной точкой пересечения. Теорема домино утверждает теперь, что мы придем в одну и ту же точку при прямом и обратном движении по пронумерованным прямым. При таком обходе наглядней применение неравенства о длинах сторон треугольника.

Неравенство о сторонах, прилегающих к острому углу треугольника:

Пусть дан треугольник ABC с углами α, β, γ и угол α при вершине A острый. Если угол β при вершине B прямой, то $|AC| = |AB|/\cos \alpha$, если β острый то $|AC| < |AB|/\cos \alpha$, если β тупой, то $|AC| > |AB|/\cos \alpha$. При изучении конфигурации, связанной с высотами треугольника, понадобится другая форма неравенства. При этих же условиях, если β острый, то $|AB| > |AC| \cos \alpha$, если β тупой, то $|AB| < |AC| \cos \alpha$.

Теорема 3.1. Теорема о невозможном многоугольнике

Пусть дано $2n$ точек A_i , таких, что прямые $L_i = A_i A_{i+n}$, $i \leq n$, все проходят через точку O . Пусть все углы $\angle A_i O A_{i+1}$ при $i < n$ и углы $\angle A_i O A_{i-1}$ при $i > n$ и угол $\angle A_1 O A_{2n}$ — острые. Тогда невозможно, чтобы все углы $\angle O A_i A_{i+1}$ при $i < n$ были тупыми, а все углы $\angle O A_i A_{i-1}$ при $i > n$ и угол $\angle O A_1 A_{2n}$ — острыми.

Ниже на рис. 5 приведен чертеж для случая $n=3$. Буквами A и O (англ. acute, острый и obtuse, тупой) обозначены острые и тупые углы соответственно условию теоремы. Острые углы при вершине O мы никак не выделяем. Поскольку теорема утверждает, что такая конфигурация углов невозможна, то и на чертеже она только обозначена, а нарисовать острые и тупые углы в соответствии с обозначением невозможно.

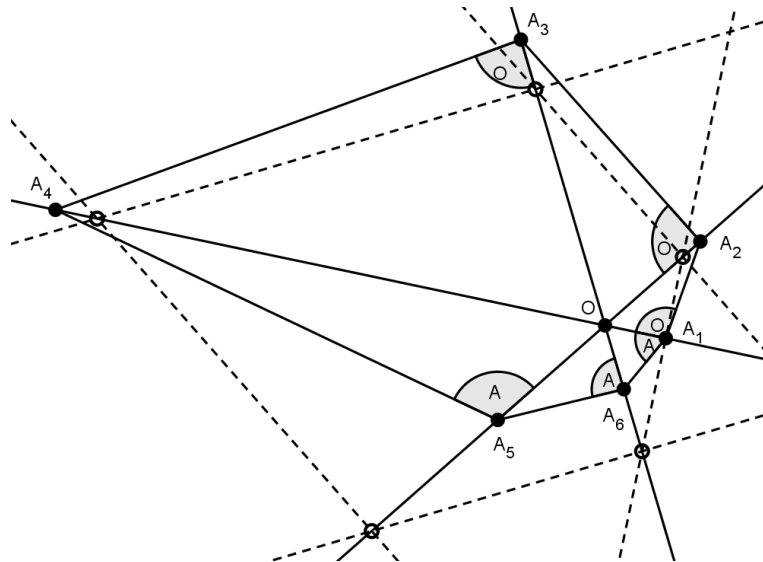


Рис. 5. Невозможный шестиугольник

Пунктирными линиями показаны перпендикуляры, проводимые на прямые, точки пересечения перпендикуляров с соответствующими прямыми, образующие конфигурацию домино, обведены. Приведенное далее неравенство выражает тот факт, что при прямом обходе сторон мы придем по одну сторону от белой точки, а при обратном — по другую.

Доказательство. Предположим противное, и такой многоугольник возможен. Тогда из многократного применения приведенного ранее неравенства об остром угле треугольника имеем из первой части условия о тупых углах:

$$|OA_n| > \frac{|OA_1|}{\cos \angle L_1 L_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \cos \angle L_i L_{i+1}}$$

А из второй части условия об острых углах имеем:

$$|OA_n| < \frac{|OA_1|}{\cos \angle L_1 L_n \cdot \prod_{i=2}^n \cos \angle L_i L_{i-1}}$$

В обоих выражения справа стоит одно и то же (из-за коммутативности умножения). Мы пришли к противоречию. \square

Замечание 3.1. Теорема обобщается на случай, когда вершины A_i расположены во многомерном пространстве и образуют ломаную, возможно самопересекающуюся. Доказательство повторяет приведенное выше, так как мы пользуемся лишь неравенством на стороны в треугольнике.

Замечание 3.2. В здесь и в теореме 4.1 присутствует условие, что при вершине O все рассматриваемые углы — острые, что позволяет использовать неравенство острого угла. Мы полагаем, что это условие избыточно. В треугольнике при вершине O присутствует, по условию конфигурации, тупой угол при одной из вершин A_i , и потому его угол при вершине O не может быть тупым. Мы формулируем это условие, чтобы не вдаваться в рассмотрение противоположных углов и порядка обхода прямых.

4. Теорема о пересечении высот треугольника и углы в шестиугольнике

Для того чтобы вывести из теоремы о пересечении высот в треугольнике утверждение о невозможности конфигурации тупых и острых углов, надо поглядеть на теорему о высотах с другой точки зрения. Теорема домино — утверждение о композиции проекций на несколько прямых, пересекающихся в одной точке. Надо и теорему о высотах превратить в подобное утверждение. Как это сделать, показано на рис. 6.

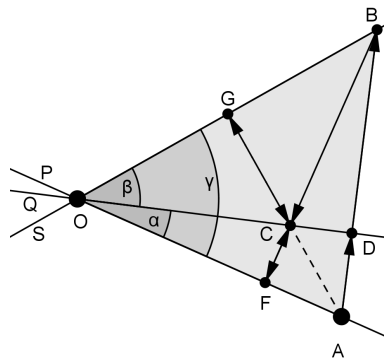


Рис. 6. Теорема о высотах как теорема о композиции проекций

P, Q, S — три прямые проекции. Пусть A — произвольная точка на P . Проведем из нее перпендикуляр на Q , из B , точки пересечения проведенного перпендикуляра с S , проведем перпендикуляр на P , из C , точки пересечения, проведем перпендикуляр на S . Из теоремы о пересечении высот для треугольника OAB следует, что он проходит через исходную точку A . Верно и обратное: если построенный перпендикуляр проходит через A , то высоты треугольника OAB пересекаются в одной точке.

Мы можем трактовать рисунок и по-другому: двигаться по перпендикулярам из точки A в точку C двумя способами. Эти способы показаны на рис. 6 стрелками. Первый способ: из A по перпендикуляру на Q до D из D снова по перпендикуляру на Q до B , из B по перпендикуляру на P , из F снова по перпендикуляру на P (на рис. 6 это возвратное движение) до пересечения с Q . Вторым способом: из A по перпендикуляру на S до G из G по перпендикуляру на S (снова возвратное движение на рис. 6) до пересечения с Q . Теорема о пересечении высот треугольника OAB утверждает, что независимо от выбранного способа мы придем в одну и ту же точку.

Доказательство теоремы о высотах теперь аналогично доказательству теоремы домино. Подсчитаем расстояния от точки O до других точек, участвующих в композиции проекций. При первом способе имеем: $|OD| = |OA| \cos \alpha$, $|OB| = |OD| / \cos \beta$, $|OF| = |OB| \cos \gamma$, $|OC| = |OF| / \cos \alpha$. Итого, после сокращения $\cos \alpha$ получим: $|OC| = |OA| \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}$. Предположим, что при втором варианте обхода мы придем не в точку C , а в некоторую другую точку W , по условию также лежащую на Q . Подсчитаем тем же методом $|OW|$. $|OG| = |OA| \cos \gamma$, $|OW| = |OG| / \cos \beta$, итого, $|OW| = |OA| \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}$ и $|OW| = |OC|$. Как и в случае теоремы домино, отсюда легко перейти к нужному нам равенству $W=C$, в плоском случае можно наглядно показать, что W и C не могут лежать по разные стороны от O , в объемном случае (доказательство пригодно и для случая, когда три исходные прямые лежат в трехмерном евклидовом пространстве) можно использовать скалярное произведение векторов.

Чтобы получить из этого рассуждения утверждение о невозможной конфигурации тупых и острых углов, достаточно в рассмотренных равенствах перейти к неравенствам, как это делалось в пред. разделе. Именно по этой причине мы и дали здесь тысячепервое доказательство теоремы о высотах. При этом переходе треугольник превратится в шестиугольник: сломается в точках оснований высот (см. рис. 7). Как и на рис. 5, тупые углы обозначены O , острые A . При этом, поскольку конфигурация невозможна, ее и невозможно изобразить, на чертеже угол при A_3 , обозначенный тупым, фактически острый.

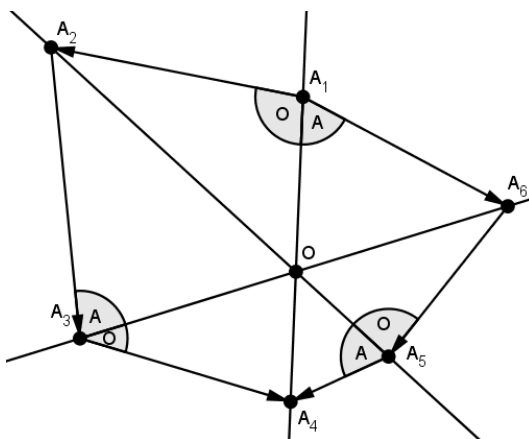


Рис. 7. Второй невозможный шестиугольник

Теорема 4.2. Теорема о невозможном шестиугольнике

Пусть три прямые $L_1 = A_1A_4$, $L_2 = A_2A_5$, $L_3 = A_3A_6$ пересекаются в одной точке O . Пусть, как и изображено на рис. 7, углы при вершине O : $\angle A_iOA_{i+1}$ ($0 < i < 6$) и $\angle A_1OA_6$ — острые. Тогда невозможно, чтобы все углы, отмеченные O , были тупыми, а все углы, отмеченные A , — острыми.

Доказательство. Доказываем от противного. Предположим, такой шестиугольник возможен. Рассмотрим изменение расстояний от точки O , при перемещении от точки A_1 до точки A_4 при движении против часовой стрелки на рис. 7, а затем при движении по часовой стрелке. В первом случае, применяя обе части неравенства об остром угле треугольника, имеем $|OA_4| > |OA_1| \frac{\cos \angle L_2L_3}{\cos \angle L_1L_2 \cos \angle L_1L_3}$, а во втором $|OA_4| < |OA_1| \frac{\cos \angle L_2L_3}{\cos \angle L_1L_2 \cos \angle L_1L_3}$. Противоречие. \square

Замечание 4.3. Сравним рис. 7 и рис. 6. Точки A_1, A_3, A_5 соответствуют на рис. 6 основаниям высот треугольника AOB , точкам D, G, F , точки A, B, C на рис. 6 — оставшимся точкам на рис. 7. Если выделенные углы на рис. 7 прямые, то неравенство обращается в равенство.

Рассмотрим частный случай (рис. 7), когда точки A_2, A_1, A_6 лежат на одной прямой, точки A_6, A_5, A_4 лежат на одной прямой, точки A_4, A_3, A_2 лежат на одной прямой. Рис. 7 превращается в хорошо известный рисунок с треугольником, точкой, и прямыми, проведенными из этой точки через его вершины (см. рис. 8).

Мы ввели более естественные обозначения и выделили углы, которые не могут быть одновременно тупыми. Также они не могут быть одновременно острыми.

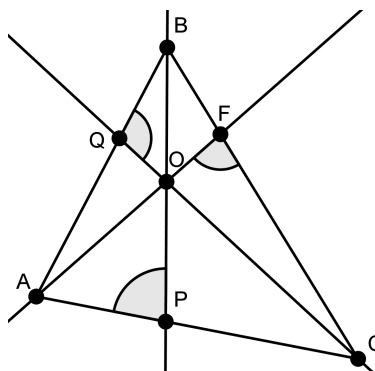


Рис. 8. Сведение шестиугольника к треугольнику

Рис. 7 естественным образом обобщается до многоугольника: между соседними прямыми на рис. 7 мы можем вставить две прямые, при одной из них тупой и острый угол, аналогично тому, как это сделано на чертеже. Также естественно обобщается и теорема о пересечении высот в треугольнике, превращаясь в подобное теореме домино утверждение о последовательном проецировании точки с прямой на прямую. Мы даем это утверждение без доказательства.

Предложение 4.1. Обобщение теоремы о пересечении высот.

Дано нечетное количество прямых, пересекающихся в одной точке. Пронумеруем их произвольно и выберем на первой прямой произвольную точку. Проведем из этой точки перпендикуляр на вторую прямую до пересечения с третьей. Из полученной точки проведем перпендикуляр на четвертую прямую до пересечения с пятой. И так далее, пока не вернемся на первую прямую. Мы обязательно вернемся в ту же точку, из которой начали движение.

Замечание 4.4. Как и теорему домино, это утверждение можно обобщить и на \mathbb{R}^n . При том же условии из произвольной точки на первой прямой проводится гиперплоскость, перпендикулярная второй прямой до пересечения с третьей, и так далее. Построение будет замыкаться в первой точке.

5. Обратный переход: принцип закулисы и малые шевеления

Мы показали, как работает пункт 2 принципа закулисы. В этом разделе мы покажем, как работает пункт 1 этого принципа, как из утверждения о невозможности какой-то конфигурации тупых и острых углов получить связанную с ней теорему о необходимой перпендикулярности

углов. Также мы увидим, когда такой переход невозможен, как было в приведенных ранее примерах: «цепь невозможных тупых углов» и «невозможный тетраэдр».

Продemonстрируем работу принципа на рис. 8.

Предложение 5.2. *Предположим, что углы $\angle CQB$ и $\angle BPA$ прямые и что конфигурация углов, показанная на рис. 8, невозможна. Тогда и угол $\angle AFC$ прямой.*

Доказательство. Доказательство от противного. Оно основано на том, что сколь угодно малым шевелением вершин прямого угла из него можно получить и острый, и тупой углы. Предположим, что углы $\angle CQB$ и $\angle BPA$ прямые, а угол $\angle AFC$ тупой. Мы можем немного пошевелить точку Q так, чтобы $\angle CQB$ стал тупым (подвинуть точку Q на малое расстояние вверх, ближе к точке B). Мы можем провести это малое шевеление так, чтобы точка B и прямая BP не двигались, но немного сдвинулись точки O и F . (При малом шевелении три прямые BP , AF и CQ должны по-прежнему пересекаться в одной точке, на чертеже — точка O .) Поскольку шевеление — малое, то $\angle AFC$ останется тупым. Теперь мы проведем малое шевеление точки P , такое, что $\angle BPA$ станет тупым (точка P двигается вправо, ближе к C). Мы проводим шевеление так, чтобы точка Q и прямая QC не шевелились. Точка F и прямая AF пошевелились, но мало, потому $\angle AFC$ останется тупым. Мы получили невозможную конфигурацию тупых углов. Следовательно, $\angle AFC$ не может быть тупым. Предположим, что $\angle AFC$ — острый. Тогда дополнительный угол $\angle AFB$ — тупой. Аналогично разобранным случаю мы проведем малые шевеления точек Q и P , но в другие стороны. Тогда станут тупыми углы $\angle CQA$ и $\angle BPC$, и мы снова получим невозможную конфигурацию тупых углов. Следовательно, $\angle AFC$ не может быть ни острым, ни тупым, следовательно, он — прямой. \square

Теперь продемонстрируем принцип закулисья по рис. 5.

Теорема 5.3. *О следовании перпендикулярности из невозможности конфигурации углов*

Пусть все отмеченные на рис. 5 углы — прямые, кроме, возможно, угла $\angle OA_1A_6$. Тогда, если невозможна указанная в теореме 3.1 конфигурация тупых и острых углов, и $\angle OA_1A_6$ — необходимо прямой.

Доказательство. Доказываем от противного. Предположим $\angle OA_1A_6$ — острый, а все остальные названные углы — прямые. Этот случай тривиален: малым шевелением точки A_2 по прямой L_2 можно сделать угол

$\angle OA_1A_2$ тупым, малым шевелением точки A_3 по прямой L_3 можно сделать $\angle OA_2A_3$ тупым, и малым шевелением точки A_4 сделаем тупым угол $\angle OA_3A_4$. В нижней части чертежа малым шевелением точек A_5, A_6 сделаем углы при них острыми. Так как, по предположению, $\angle OA_1A_6$ — острый и при малых шевелениях он остался острым, то мы получили невозможную конфигурацию углов и тем самым пришли к противоречию.

Предположим $\angle OA_1A_6$ — тупой. Заметим, что конфигурация углов на рис. 5 симметрична относительно прямой L_3 . Из-за равноправия точек A_i из запретности указанной конфигурации следует невозможность конфигурации, где все нижние отмеченные углы тупые, а верхние — острые. Теперь мы шевелим достаточно мало все точки A_i (кроме A_1) по прямым L_i в стороны, противоположные первому случаю, достигая противоположных результатов: все верхние углы на рис. 5 будут острыми, а нижние, в том числе $\angle OA_1A_6$, — тупыми (последнее верно, поскольку при малых шевелениях его величина изменится мало). И в этом случае с помощью малых шевелений мы получили невозможную конфигурацию и пришли к противоречию. \square

Во введении мы привели рис. 1 и 2, где принцип закулисья не работает: невозможные конфигурации углов есть, но с ними не связаны теоремы о перпендикулярности. Сейчас мы привели два случая, где принцип закулисья работает. В чем причина этого различия? Проанализируем условия невозможности конфигурации углов. В обоих вариантах условие представимо в виде: если $\forall_{i < n} \alpha_i = \chi_i$, то $\alpha_n = \chi_n$, где n — число углов, α_i — углы конфигурации, χ_i — переменная, характеризующая угол и имеющая всего два значения — «А» или «О» («острый» или «тупой», как на чертежах). Здесь приравнен угол не его величине, а его характеристике: острый или тупой, всюду в дальнейшем, когда мы говорим *характеристика* угла, мы имеем в виду его тупизну или остроту.

В первых двух примерах условие выглядит так: если $\forall_{i < n} \alpha_i = O$ то $\alpha_n = A$. При этом, если характеристики первых $n-1$ углов будут каким-либо образом изменены, из условия не будет следовать, что α_n — тупой. Мы можем рассматривать характеристику α_n как функцию $\Theta(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ от характеристик первых $n-1$ углов, считая Θ определенной лишь, если из ее аргументов однозначно следует значение α_n . В данных случаях Θ ни при каких значениях своих аргументов не принимает значения А, «острый».

Иным образом обстоит дело с невозможными конфигурациями на

рис. 5, 7, 8. Теперь функция Θ при некоторых характеристиках углов α_i ($i < n$) определена и принимает значение «тупой», а при других аргументах определена и принимает значение «острый». Это происходит из-за симметрий в расположении углов, и мы этим существенно пользовались в доказательствах соответствующих теорем. Сформулируем теперь уточнение принципа закулисы для конфигураций тупых и острых углов.

Если связанная с невозможной конфигурацией углов функция Θ при некоторых своих аргументах определена и принимает значение «тупой», а при других аргументах определена и принимает значение «острый», то с данной невозможной конфигурацией связана теорема о необходимой перпендикулярности: если первые $n-1$ углов конфигурации прямые, то и последний угол — необходимо прямой.

6. Подведение итогов и возможные обобщения

Коллекционирование невозможных конфигураций тупых и острых углов в евклидовой планиметрии — увлекательное занятие, дающее задачи разной сложности. Некоторые из них подходят для математических кружков, примеры этого есть в статье, другие, мы полагаем, не имеют простого решения. Например: пусть нам дано n точек. Каково наименьшее и наибольшее число тупых (острых) углов может находиться во всех треугольниках, образованных данными точками? Верно ли, что для любых n точек число тупых углов, образованных ими, меньше числа острых?

Нам интересна связь метрических теорем Паппа и Дезарга с невозможными конфигурациями углов. Метрическая теорема Паппа может легко трактоваться как теорема о композиции перпендикулярных проекций двух данных прямых друг на друга (см. [6]), как мы трактовали теорему о пересечении высот треугольника и теорему домино, поэтому применение к ней принципа закулисы должно быть не слишком сложно. Также интересны частные случаи этих теорем.

6.1. Неевклидовы геометрии

С уточнениями наши рассуждения переносятся и в неевклидовы геометрии. Теорема о высотах треугольника хорошо известна. Теорема домино легко доказывается в эллиптической планиметрии (на модели связки прямых и плоскостей), мы полагаем, что она легко доказывается и в геометрии Лобачевского (например, исчислением симметрий по Бахману [1]). Но в эллиптической геометрии ее надо ограничить: проводимые перпендикуляры должны быть единственными, потому среди данных прямых не должно быть поляр данных точек. В геометрии Ло-

бачевского теорему домино можно расширить, она верна и для случая, когда данные прямые не пересекаются в одной точке, а образуют пучок (см. [1]).

Невозможные конфигурации на рис. 1 и 2 очевидно невозможны и в неевклидовых геометриях. Доказательства теорем о невозможном многоугольнике и шестиугольнике необходимо видоизменить: обойтись без тригонометрической формы неравенства острого угла. Его можно переписать, оперируя длинами проекций сторон и проводить доказательство по индукции. Все рассуждения раздела 5 остаются в силе. С помощью конфигурации тупых и острых углов легко сформулировать и различие трех геометрий. В геометрии Лобачевского не может быть четырехугольника со всеми тупыми углами, в эллиптической геометрии невозможен четырехугольник со всеми острыми углами, а в геометрии Евклида невозможен ни тот, ни другой четырехугольник, что основано на том, что только в геометрии Евклида возможен квадрат, см., например, [7,8] о трипрямоугольнике Ламберта. Мы полагаем, что метод и многие теоремы могут перенесены и в 9 геометрий или кинематики, о которых см. [9] и подробнее [8].

6.2. Многомерные пространства

Все проведенные построения верны и в \mathbb{R}^n с учетом сделанных ранее оговорок и во многомерных неевклидовых пространствах. В \mathbb{R}^n знак скалярного произведения $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ положителен, если $\angle BAC$ — острый, и отрицателен, если $\angle BAC$ — тупой. Отсюда следует, что все утверждения о невозможности какой-то конфигурации тупых и острых углов можно выразить через систему неравенств со скалярными произведениями векторов (с началами и концами в точках конфигурации). Например, то, что в треугольнике не может быть двух тупых углов выражается так: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0$, следовательно, $\vec{BC} \cdot \vec{BA} > 0$ и $\vec{CB} \cdot \vec{CA} > 0$, а теорема о невозможном многоугольнике выражается векторным исчислением так:

Дано $2n$ точек A_i , таких, что существует точка O , такая, что \vec{OA}_i и \vec{OA}_{i+n} коллинеарны. Пусть $\forall_{i < n} \vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_{i+1} > 0$ и $\forall_{i > n} \vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_{i-1} > 0$. Тогда невозможно, чтобы $\forall_{i < n} \vec{A_iO} \cdot \vec{A_{i+1}O} < 0$ и $\forall_{i > n} \vec{A_iO} \cdot \vec{A_{i-1}O} > 0$ и $\vec{A_1O} \cdot \vec{A_{2n}O} > 0$.

Мы можем в векторных неравенствах перейти к координатному виду и получить неравенства о квадратичных формах.

Мы надеемся, что приведенные примеры, теоремы и возможные обобщения показывают, сколь много интересного и существенного открывается при изучении невозможных конфигураций тупых и острых

углов. Для нас особое значение имеет завершение раздела 5, показывающего связь непрерывности и принципа закуситься на ясных геометрических примерах.

Список литературы

1. **Бахман Ф.** Построение геометрии на основе понятия симметрии / пер. с нем. Р.И. Пименова; под ред. И.М. Яглома. М.: Наука, 1969. 380 с.
2. **Tabachnikov S.** Skewers // *Arnold Mathematical Journal*. 2, 2016. Pp. 171–193.
3. **Пименов Р. Р.** К логическим и наглядно-геометрическим свойствам ориентации 1 // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона : периодический межвузовский сборник научно-методических работ*. Киров: Научн. изд-во ВятГУ, 2016. Вып. 18. С. 99–114.
4. **Пименов Р. Р.** К логическим и наглядно-геометрическим свойствам ориентации 2 // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона : периодический межвузовский сборник научно-методических работ*. Киров: Научн. изд-во ВятГУ, 2016. Вып. 18. С. 115–126.
5. **Пименов Р. Р.** Обобщения теоремы Дезарга: геометрия перпендикулярного // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*, 2016. Вып. 1 (21). С. 28–43.
6. **Пименов Р. Р.** Трактовки теорем Паппа: перпендикулярность и инволютивность // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика*, 2017. Вып. 2 (23). С. 29–45.
7. **Погорелов А. В.** Основания геометрии. 3-е изд. М.: Наука, 1968. 208 с.
8. **Пименов Р. И.** Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений // *Литовский матем. сб.* 1965. Т. 5. № 3. С. 457–486.

9. **Скопенков М.** Наглядная геометрия и топология. URL: <http://skopenkov.ru/courses/geometry-16.html>.

Summary

Pimenov R. R. The geometry of perpendicularity: obtuse and acute angles in known theorems

In the article we introduce and research the conception of «the impossible configuration of obtuse and acute angles» and its relation to theorems about perpendicularity in the plane and \mathbb{R}^n . We study two theorems, about intersection altitudes in triangle and about projections, the last we named as «the domino theorem». We generalise both theorems for arbitrary numbers of lines and discover related with them impossible configuration of angles. We show as using continuity and method of «small moving» we can derive theorems about perpendicular lines from impossible configurations of angles. We view at the right angle as the boundary between acute and obtuse angles for this. We consider the using of these methods in non-Euclidean geometry, in \mathbb{R}^n and express them in terms of vector algebra.

Keywords: perpendicularity, continuity, projection, orientation, altitude of triangle.

References

1. **Bachmann F.** *Postroenie geometrii na osnove ponyatiya simmetrii* (Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff), M.: Nauka, 1969, 380 p.
2. **Tabachnikov S.** Skewers, *Arnold Mathematical Journal*, 2, 2016, pp. 171–193.
3. **Pimenov R. R.** K logicheskim i naglyadno-geometricheskim svojstvam orientacii 1 (About logic and visual-geometric properties of orientation 1), *Matematicheskyy vestnik pedvuzov i yuniversitetov Volgo-Viatskogo regiona: periodichesky mejvuzovskyy sbornik nauchno-metodicheskyyh rabot*, Kirov: Nauchn. izd-vo ViatGU, 2016, vyp. 18, pp. 99–114.
4. **Pimenov R. R.** K logicheskim i naglyadno-geometricheskim svojstvam orientacii 2 (About logic and visual-geometric properties of orientation 2), *Matematicheskyy vestnik pedvuzov i yuniversitetov Volgo-Viatskogo regiona: periodichesky mejvuzovskyy sbornik nauchno-metodicheskyyh rabot*, Kirov: Nauchn. izd-vo ViatGU, 2016, vyp. 18, pp. 115–126.

5. **Pimenov R. R.** Obobshcheniya teoremy Dezarga: geometriya perpendikulyarnogo (The generalization the Desargues's theorem and geometry of perpendicularity), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, №1 (21), pp. 28–43.
6. **Pimenov R. R.** Traktovki teorem Pappa: perpendikulyarnost' i involyutivnost' (The interpretation and generalizations the Pappus's theorems: involutions and perpendicularity), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 2 (23), pp. 29–45.
7. **Pogorelov A. V.** *Osnovaniya geometrii* (The foundation of geometry), 3-e izdanie, Moskva: Nauka, 1968, 208 p.
8. **Pimenov R. I.** Edinaya aksiomatika prostranstv s maksimal'noj gruppoj dvizhenij (Unified axiomatics of spaces with the maximum group of motions), *Litovsk. Mat. Sb.*, 5, 1965, pp. 457–486.
9. **Skopenkov Michail.** Naglyadnaya geometriya i topologiya (Visual geometry and topology), URL: <http://skopenkov.ru/courses/geometry-16.html>.

Для цитирования: Пименов Р. Р. Геометрия перпендикулярного: тупые и острые углы в известных теоремах // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 3 (24). С. 56–73.*

For citation: Pimenov R. R. The geometry of perpendicularity: obtuse and acutes angles in known theorems, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №3 (24), pp. 56–73.

Санкт-Петербургский национальный

исследовательский академический университет

Поступила 27.08.2017