*МАТЕМАТИКА*

*Вестник Сыктывкарского университета.*
*Серия 1: Математика. Механика. Информатика.*
*Выпуск 3 (24). 2017*

**УДК 517.981**

# НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПРОБЛЕМЕ НОРМИРУЕМОСТИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

***Ю. Н. Ловягин***

Исследуется связь между свойством нормируемости булевой алгебры и существованием на ней полуаддитивной (о)-непрерывной существенно положительной функции. Приводятся критерии, при соблюдении которых полунормируемая булева алгебра не имеет меры.
*Ключевые слова:* булева алгебра, мера, проблема Д. Магарам.

## 1. Введение

Теория меры и интеграла является одной из важнейших как в «чистом», так и в прикладном анализе и теории вероятностей. Основам теории меры и интеграла посвящено много монографий, например [1–3] и другие. Однако вопрос существования (построения) меры в них ограничивается построением меры Лебега на ячейках и различных её модификациях, а также примерами тривиальных и экзотических мер. С другой стороны, возможен подход к понятию меры как интегралу (аддитивному, возможно со свойствами непрерывности, функционалу на некотором классе функций). Такой подход осуществляется Н. Бурбаки. Есть наброски теории интегрирования и в [4]. И если при классическом подходе к мере как функции множества интеграл выступает как некоторый строимый функционал, то при принятии понятия интеграла как исходного мера появляется как интеграл от характеристических функций множества. Но и при таком подходе вопрос существования меры остается весьма слабо освещенным.

Абстракцией от понятия алгебры множеств, алгебры событий является понятие булевой алгебры. Теория булевых алгебр систематически изложена в монографиях [5–7]. Причем в первых двух существенное место занимает именно метрическая теория булевых алгебр: теория нормируемых (нормированных) булевых алгебр. Под нормированной булевой алгеброй (алгеброй с мерой) понимается полная булева алгебра с фиксированной на ней положительной функцией специального вида. Главным свойством меры является свойство аддитивности, которое можно условно охарактеризовать как «мера суммы равна сумме мер». В процессе же построения продолжения меры на некоторый более широкий класс множеств применяется схема, восходящая к Каратеодори и использующая понятие внешней меры. Внешняя мера отличается от меры заменой аддитивности на полуаддитивность: «мера суммы меньше суммы мер». В 1947 году Д. Магарам в [8] поставила вопрос, будет ли алгебра с внешней мерой нормируемой, то есть существует ли на ней некоторая мера. Поставленный вопрос известен сейчас как гипотеза или проблема Магарам.

Проблеме Магарам и связанным с ней вопросам посвящено много работ: [9, 10], обзор результатов в направлении решения проблемы Магарам имеется в [2]. В настоящей заметке на основании результатов, полученных автором [11–15], приводится ответ на вопрос, поставленный Магарам.

## 2. Основные понятия теории булевых алгебр

*Определение* 2.1. Пусть $X$ — некоторое непустое множество, $ord$ — рефлексивное, транзитивное антисимметричное отношение на $X$. Такое отношение называется отношением порядка, а пара $\mathfrak{X} = \langle X, ord\rangle$ — (частично) упорядоченным множеством.

В дальнейшем отождествляется частично упорядоченное множество $\mathfrak{X}$ и его множество-носитель $X$, то есть говорим о частично упорядоченном множестве $X$. Вместо $\langle a, b\rangle \in ord$ пишут $a \leqslant b$.

*Определение* 2.2. В частично упорядоченном множестве множество $E \subset X$ называется ограниченным сверху (снизу), если множество $E^s = \{x \in X : \forall e\,(e \in E \supset e \leqslant x)\}$ (множество $E^i = \{x \in X : \forall e\,(e \in E \supset x \leqslant e)\}$) непусто.

Легко понять, что пересечения $E^{si} \cap E^s$ и $E^{is} \cap E^i$ в любом частично упорядоченном множестве содержат не более одного элемента.

*Определение* 2.3. Супремумом (инфимумом) множества $E \subset X$ в частично упорядоченном множестве $X$ называется единственный элемент (если существует) пересечения $E^{si} \cap E^s$ ($E^{is} \cap E^i$).

Супремум (инфимум) множества $E \subset X$ обозначается $\sup E$ ($\inf E$).

*Определение* 2.4. Решеткой называется частично упорядоченное множество, в котором каждое двухэлементное множество имеет супремум и инфимум. Для $E = \{x, y\}$ пишут $\sup E = x \vee y$, $\inf E = x \wedge y$. Если в решетке каждое множество имеет супремум и инфимум, то решетка называется полной. Если же всякое счетное множество решетки имеет супремум и инфимум, то решетка называется $\sigma$-полной.

*Определение* 2.5. Нулем или наименьшим элементом частично упорядоченного множества $X$ называется элемент $\mathbf{0}$, такой, что $\forall x \, (x \in X \supset \mathbf{0} \leqslant \leqslant x)$. Двойственно определяется единица или наибольший элемент $\mathbf{1}$: $\forall x \, (x \in X \supset x \leqslant \mathbf{1})$.

Отметим, что в полном частично упорядоченном множестве $X$ единицей является $\inf \emptyset = \sup X$, а нулем — $\sup \emptyset = \inf X$.

*Определение* 2.6. Решетка $L$ называется дистрибутивной, если для любых элементов $x, y, z \in L$ имеют место равенства

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)\,,$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)\,.$$

*Определение* 2.7. В решетке с нулем и единицей дополнением элемента $x$ называется элемент $x'$ со свойствами: $x \vee x' = \mathbf{1}$, $x \wedge x' = \mathbf{0}$.

*Определение* 2.8. Булевой алгеброй (булевой решеткой) называется дистрибутивная решетка с нулем и единицей, в которой каждый элемент имеет дополнение.

Легко видеть, что в дистрибутивной решетке любой элемент может иметь не более одного дополнения. Поэтому булеву алгебру $B$ можно рассматривать как алгебраическую структуру с двумя бинарными операциями $\bigvee, \bigwedge \ : \ B \times B \longrightarrow B$ и унарной операцией инволлюции $' \ : \ B \longrightarrow B$, обладающими свойствами теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения (свойствами операций над событиями, свойствами логических операций дизъюнкции, конъюнкции, отрицания).

Таким образом, булеву алгебру можно рассматривать как абстракцию от соответствующих конкретных понятий.

Пусть $\sim$ — конгруэнция на булевой алгебре $B$. Тогда можно рассмотреть факторалгебру, состоящую из классов эквивалентности с естественно определенными операциями. Отметим, что порядок на фактор-алгебре определяется по очевидному свойству, имеющему место в любой решетке: $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x \vee y = y$ $(x \wedge y = x)$.

*Определение* 2.9. Элементы $x, y \in B$ называются дизъюнктными, если $x \wedge y = \mathbf{0}$. Дизъюнктным дополнением множества $E \subset B$ называется множество $E^d = \{x \in B \ : \ \forall e \, (e \in E \supset e \wedge x = \mathbf{0})\}$.

*Определение* 2.10. Множество $K \subset B$ называется компонентой, если $K^{dd} = K$.

Известно [5], что компонента полной булевой алгебры является самостоятельной булевой алгеброй $B_u = [\mathbf{0}, u] = \{x \in B \ : \ \mathbf{0} \leqslant x \leqslant u\}$ для некоторого $u \in B$, играющего роль единицы.

Если $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — класс полных булевых алгебр, то декартово произведение $B = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ с покоординатными операциями и порядком является полной булевой алгеброй. При этом каждая булева алгебра $B_\lambda$ изоморфна компоненте $B_{u_\lambda}$, где $u_\lambda$ — проекция единицы $B$ на соответствующий сомножитель.

*Определение* 2.11. В описанном случае говорят, что булева алгебра $B$ является полным соединением компонент $B_\lambda$ и обозначает $B = \mathscr{S}_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$. Элементы полного соединения обозначаются $x = {}_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$. Подалгебра полного соединения, состоящая из элементов вида ${}_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$, у которых не более чем счетное множество координат отлично от нуля, называется счетным соединением компонент и обозначается $\sigma - \mathscr{S}_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$.

*Определение* 2.12. Булева алгебра, в которой любое множество, состоящее из попарно дизъюнктных элементов не более чем счетно, называется булевой алгеброй счетного типа.

В дальнейшем нас интересуют только алгебры $\sigma$-полные счетного типа.

*Определение* 2.13. Пусть $x_n \in B$ — последовательность элементов булевой алгебры $B$. Обозначим $\overline{\lim} x_n = \bigwedge\limits_{n=0}^{\infty} \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k$, $\underline{\lim} x_n = \bigvee\limits_{n=0}^{\infty} \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k$. Эти элементы, существующие для любой последовательности (в силу $\sigma$-полноты алгебры), называются верхним и нижним пределами последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Если $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$, то последовательность называется $(o)_\sigma$-сходящейся, а общее значение верхнего и нижнего пределов называют ее $(o)_\sigma$-пределом: $(o)_\sigma - \lim x_n = \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$.

В дальнейшем, поскольку других понятий предела в булевых алгебрах мы не рассматриваем, будем пользоваться более простым обозначением: $x = \lim x_n$, $x_n \longrightarrow x$ для выражения факта $(o)_\sigma$-сходимости последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ к элементу $x$.

*Определение* 2.14. Принципом диагонали в $\sigma$-полной булевой алгебре счетного типа называется утверждение:

для каждой «двойной» последовательности $(x_{nk})$, такой, что из $x_{nk} \longrightarrow x_k$ (для каждого $k$) и $x_k \longrightarrow x$, следует, что существует строго возрастающая последовательность $n_k$, такая, что $x_{n_k k} \longrightarrow x$.

Булева алгебра счетного типа, в которой выполнен принцип диагонали, называется регулярной.

## 3. Функции на булевых алгебрах

Следуя работе автора [11] и монографии [5], опишем классы функций на булевых алгебрах.

*Определение* 3.15. Пусть $B$ — булева алгебра (необязательно полная, необязательно счетного типа), $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}$ — некоторая функция.

Функция $\varphi$ называется:

- аддитивной, если $\forall x \forall y \, (x \wedge y = \mathbf{0} \supset \varphi\,(x \vee y) = \varphi\,(x) + \varphi\,(y))$;
- положительной, если $\forall x \varphi\,(x) \geqslant 0$;
- квазимерой (далее — КМ), если она положительна и аддитивна;
- существенно положительной (далее — СП), если она положительна и $\forall x \, (\varphi\,(x) = 0 \supset x = \mathbf{0})$;
- непрерывной, если из условия $\lim x_n = x$ следует $\lim \varphi\,(x_n) = \varphi\,(x)$;
- мерой, если она является непрерывной СПКМ;
- монотонной, если $\forall x \forall y \, (x \leqslant y \supset \varphi\,(x) \leqslant \varphi\,(y))$;
- полуаддитивной (субаддитивной — [2]), если $\forall x \forall y \varphi\,(x \vee y) \leqslant \leqslant \varphi\,(x) + \varphi\,(y)$;
- внешней квазимерой (далее — ВКМ), если она положительна, монотонна и полуаддитивна;
- внешней мерой (полумерой), если она является непрерывной СПВКМ.

Известно [5], что всякая булева алгебра с СПКМ или СПВКМ является алгеброй счетного типа, а если на алгебре есть мера или полумера, то такая алгебра регулярна. С другой стороны, Гайфман в [16] привел пример булевой алгебры счетного типа, на которой нет ни одной СПКМ.

*Определение* 3.16. Булеву алгебру, на которой нет СПКМ, будем называть гайфмановой.

Ясно, что если булева алгебра содержит гайфманову подалгебру, то она сама является гайфмановой.

*Определение* 3.17. Булева алгебра $B$ называется нормированной (полунормированной), если на ней задана некоторая мера (полумера). Нормируемой (полунормируемой) называется булева алгебра, на которой можно задать меру (полумеру).

Основная задача, которая поставлена Д. Магарам, звучит так: является ли полунормируемая булева алгебра нормируемой. В настоящей работе приведен пример гайфмановой полунормируемой алгебры, следовательно, на такой алгебре нельзя задать меру.

Доказательства нижеприведенных теорем имеется в [5].

*Теорема* 3.1. Пусть $B$ — булева алгебра с СПКМ $\varphi$. Тогда существует полная булева алгебра $\tilde{B}$ с мерой $\tilde{\varphi}$, такая, что

$$\forall x\,(x \in B \supset \varphi\,(x) = \tilde{\varphi}\,(x))\,,$$

и для любого $\tilde{x} \in \tilde{B}$ существует последовательность $x_n \in B$, такая, что $x_n \longrightarrow \tilde{x}$.

*Теорема* 3.2. Пусть $B$ — произвольная булева алгебра. Для любого $x \in B$ существует КМ $\varphi_x$, такая, что $\varphi_x\,(x) > 0$.

Эту теорему называют теоремой о достаточном числе КМ на булевой алгебре. Мы воспользуемся приведенными фактами для доказательства основных результатов.

## 4. Погружение регулярной алгебры в соединение нормируемых

*Теорема* 4.3. Для любой булевой алгебры $B$ существует семейство полных булевых алгебр $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, таких, что:

- Булева алгебра $A_\lambda$ нормируема для каждого $\lambda \in \Lambda$.
- Существует подалгебра $A$ полного соединения $\mathscr{S}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, изоморфная $B$.

**Доказательство.** Пусть $\Phi$ — некоторое достаточное множество КМ на $B$, то есть для любого элемента $x \in B$ существует $\varphi \in \Phi$ так, что $\varphi\,(x) > 0$. Перенумеруем $\Phi$ посредством некоторого ординала $\Lambda$: $\Phi = \{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Для каждой КМ $\varphi_\lambda$ определим $B_\lambda$ как факторалгебру алгебры $B$ по конгруэнтности: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $\varphi\,(x +_2 y) = 0$, где $x +_2 y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ — симметрическая разность элементов булевой алгебры. Легко проверяется, как и в классической теории меры, что получившееся отношение является отношением эквивалентности, устойчивым относительно булевых операций, а соответствующая факторфункция $\varphi_\lambda$, определенная правилом $\varphi_\lambda(\overline{x}) = \varphi(x)$ для класса эквивалентности $\overline{x}$ элемента $x \in B$, является СПКМ на булевой алгебре $B_\lambda$. Обозначим $A_\lambda$ — нормированную булеву алгебру, построенную по алгебре $B_\lambda$ применением теоремы 3.1.

Определим теперь вложение $B$ в $\mathscr{S}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ как «диагональной» подалгебры: $b \in B \ \mapsto a = (a_\lambda)\,, \quad a_\lambda = b$. Легко понять, что это изоморфное вложение. Теорема доказана.

Отметим, что среди алгебр $B_\lambda$ уже могут оказаться нормируемые. Так, например, будет, если соответствующая КМ $\varphi_\lambda$ является непрерывной. В этом случае процесс «пополнения» по теореме 3.1 не даст нового, то есть $A_\lambda = B_\lambda$. С другой стороны, возможен случай, когда $B_\lambda = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ — тривиальная булева алгебра. В этом случае очевидно, что $A_\lambda = B_\lambda$, и соответствующий сомножитель можно не учитывать.

Ясно, что единицы компонент $A_\lambda$ являются попарно дизъюнктными элементами. Следовательно, их проекции на диагональ $A$ также образуют множество, состоящее из попарно дизъюнктных элементов. Отсюда получается, что в случае если исходная алгебра счетного типа, то каждый ее элемент в образе соединения имеет не более, чем счетное множество ненулевых координат. Таким образом, справедлива следующая теорема.

*Теорема* 4.4. Всякая булева алгебра счетного типа изоморфна подалгебре счетного соединения нормированных булевых алгебр.

Отметим, что построенное в доказательстве теоремы 4.3 соединение нормируемых булевых алгебр $\mathscr{S}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ представляет собой булеву алгебру с достаточным числом непрерывных квазимер. Точнее, каждая мера $\mu_\lambda$ на алгебре $A_\lambda$ является непрерывной КМ на всем соединении. С другой стороны, для каждого элемента $x \in \mathscr{S}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ существует КМ, отличная от нуля на этом элементе. В противном случае функция $\mu_\lambda$ не была бы СП.

*Определение* 4.18. Пусть $B_1$ — подалгебра $B_2$. Говорят, что подалгебра $B_1$ является правильной подалгеброй $B_2$, если для любого множества $E \subset B_1$ $\sup_{B_1} E = \sup_{B_2} E$ и $\inf_{B_1} E = \inf_{B_2} E$.

*Теорема* 4.5. Если $B$ — регулярная булева алгебра, то существует правильная подалгебра счетного соединения нормированных алгебр, изоморфная $B$.

**Доказательство.** Докажем следующее утверждение:

Пусть $A$ — регулярная булева алгебра, являющаяся подалгеброй счетного соединения нормированных алгебр $(B_\omega)_{\omega\in\Omega}$. Тогда подалгебра $A$ правильная.

Действительно, покажем сначала, что счетное соединение регулярных алгебр регулярно. Счетность типа очевидна. Докажем принцип диагонали. Пусть $x_{nk} \longrightarrow x_n$, $x_n \longrightarrow x$, $x_{nk}, x_n, x \in A$. В силу того, что каждый элемент счетного соединения имеет не более чем счетное множество ненулевых координат, можно считать, что соотношения $x^\omega_{nk} \longrightarrow x^\omega_n$, $x^\omega_n \longrightarrow x_\omega$ выполнены для некоторого не более чем счетного множества индексов $\omega \in \Omega$. Так как $x^\omega_{nk}, x^\omega_n, x^\omega \in B_\omega$, в силу регулярности алгебр $B_\omega$ существует строго возрастающая последовательность индексов $n_k$ так, что $x^\omega_{n_k k} \longrightarrow x^\omega$. Теперь легко видеть, что последовательность $(x_{n_k k})$ имеет предел $x$ в алгебре $\sigma - \mathscr{S}_{\omega\in\Omega} B_\omega$.

Для завершения доказательства нужно проверить замкнутость алгебры $A$ в $B = \sigma - \mathscr{S}_{\omega\in\Omega} B_\omega$. Пусть $E \subset A$ и $a = \sup_A E$, $b = \sup_B E$. Ясно, что $a \geqslant b$. Предположим, что $a > b$. По свойствам супремума [5] существуют последовательность $a_n \in A$, такая, что $a_n \longrightarrow a$, и последовательность $b_m \in B$, такая, что $b_m \longrightarrow b$ (в соответствующих алгебрах). Положим $x_{nm} = b_m \vee a_n$. Тогда $\lim x_{nm} = b_m \vee a$, $b_m \vee a \longrightarrow b \vee a = a$. Следовательно, существует строго возрастающая последовательность индексов $m_n$, такая, что $x_{m_n n} \longrightarrow a$.

С другой стороны, $x_{m_n n} \in A$ и, следовательно, $x_{m_n n} \leqslant b$, но тогда $\lim x_{m_n n} \leqslant b < a$. Полученное противоречие и доказывает требуемое.

Теперь заключение теоремы очевидно.

## 5. Существование полумеры на регулярной алгебре

*Теорема* 5.6. Пусть $A = \sigma - \mathscr{S}_{\omega\in\Omega} A_\omega$, $A_\omega$ $(\omega \in \Omega)$ — полная булева алгебра с мерой $\mu_\omega$. Положим $\nu: \ \nu(x_\omega) = \sup\{\mu_\omega(x) \ : \ \omega \in \Omega\}$. Тогда $\nu$ — СП монотонная полуаддитивная функция на $A$.

**Доказательство.** Имеем $\nu(x \vee y) = \sup\limits_{\omega\in\Omega} \mu_\omega(x_\omega \vee y_\omega) \leqslant$

$$\leqslant \sup_{\omega\in\Omega}\{\mu_\omega(x_\omega) + \mu_\omega(y_\omega)\} \leqslant \sup_{\omega\in\Omega} \mu_\omega(x_\omega) + \sup_{\omega\in\Omega} \mu_\omega(y_\omega) = \nu(x) + \nu(y).$$

Существенная положительность и монотонность очевидны. Теорема доказана.

Определим теперь в условиях теоремы 5.6 функцию $\theta \ : \ A \longrightarrow \mathbb{R}$ правилом $\theta(a) = \inf\{\nu(x) \ : \ a \leqslant x\}$.

*Теорема* 5.7. Функция $\theta$ является полумерой на булевой алгебре $A$.

**Доказательство.**

Ясно, что $\theta$ монотонна и для всех $a \in A$ $\theta(a) \leqslant \nu(a)$.

Пусть $c = a \vee b$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся такие $x, y \in A$, что $a \leqslant x$, $b \leqslant y$ и

$$\nu(x) < \theta(a) + \varepsilon, \;\; \nu(y) < \theta(b) + \varepsilon.$$

Тогда $\theta(a \vee b) \leqslant \nu(x \vee y) \leqslant \nu(x) + \nu(y) < \theta(a) + \theta(b) + 2\varepsilon$.

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon$ получается полуаддитивность функции $\theta$.

Предположим теперь, что $\theta(a) = 0$, но $a > \mathbf{0}$. Тогда существует такая последовательность $x_n \geqslant a$, что $\nu(x_n) \longrightarrow 0$.

По определению $\nu(x_n) = \sup_{\omega_n} \mu_{\omega_n}(x_n)$. При этом, не умаляя общности, можно считать, что рассматривается не более чем счетное множество индексов, для которых координаты $a$ отличны от нуля. Тогда получается, что некоторая двойная последовательность $x_{nk} = x_{n\omega_{n_k}} \geqslant a_{\omega_{n_k}}$ обладает свойством

$$x_{nk} \longrightarrow \mathbf{0}, \;\; x_n k \geqslant p \text{ при ненулевом } p \in A_\beta \text{ при некотором } \beta.$$

В силу регулярности алгебры существует «диагональная» последовательность $x_{nk_n} \longrightarrow \mathbf{0}$, что противоречит условию $p > \mathbf{0}$. Таким образом, функция $\theta$ является СП.

Пусть последовательность $x_n \in A$ такая, что $x_n \longrightarrow x \in A$. Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ $x_n^\omega \longrightarrow x^\omega$. В силу непрерывности меры отсюда следует, что $\mu_\omega(x_n^\omega) \longrightarrow \mu_\omega(x^\omega)$.

Далее, учитывая, что сходимость последовательности $(x_n)$ к $x$ в булевой алгебре равносильна тому, что $x_n +_2 x \longrightarrow \mathbf{0}$, получаем $|\theta(x_n) +_2 \theta(x)| \leqslant |\nu(x_n) +_2 \nu(x)| \leqslant \sup_{\omega\in\Omega} |\mu_\omega(x_n^\omega) +_2 \mu_\omega(x^\omega)| \longrightarrow \mathbf{0}$, что и доказывает непрерывность $\theta$.

Таким образом теорема полностью доказана.

В качестве следствия получается следующая теорема.

*Теорема* 5.8. Пусть $A$ — регулярная полная булева алгебра. Тогда на $A$ существует полумера $\mu$.

**Доказательство.** Погрузим алгебру $A$ как правильную подалгебру в счетное соединение нормированных алгебр. Тогда сужение полумеры, существующей на счетном соединении согласно теореме 5.7, является полумерой на $A$.

С другой стороны, поскольку всякую булеву алгебру счетного типа можно изоморфно (как подалгебру) погрузить в счетное соединение нормируемых, на всякой булевой алгебре счетного типа (необязательно полной) существует СПВКМ. Однако, на гайфмановой булевой алгебре нет ни одной СПКМ.

Рассматривая теперь произвольную гайфманову булеву алгебру, погружаем её в качестве подалгебры в некоторую регулярную булеву алгебру $A$ с полумерой $\nu$. Ясно, что $A$ не может быть нормируемой, ибо содержит гайфманову подалгебру. Что и дает отрицательный ответ на вопрос Д. Магарам.

## Список литературы


1. **Порошкин А. Г.** Теория меры и интеграла. М.: КомКнига, 2006. 184 с.

2. **Порошкин А. Г.** Упорядоченные множества. Булевы алгебры. Сыктывкар: СыктГУ, 1987. 85 с.

3. **Halmos P.** Measure theory. Berlin-Haidelberg-New York: Springer, 1950. 304 p.

4. **Kelley J.** General topology. Toronto-London-New York: D van Nostard company, 1957. 432 p.

5. **Владимиров Д. А.** Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 318 с.

6. **Владимиров Д. А.** Теория булевых алгебр. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2000. 616 с.

7. **Halmos P.** Lectures on Boolean algebras. Prinston, New-Jersey. D. van Nostard company, 1963. 96 p.

8. **Mayaram D.** An algebraic characterization of measure algebras // *Ann. Math., 1947. V. 48, № 1. Pp. 154–167.*

9. **Попов В. А.** Аддитивные и полуаддитивные функции на булевых алгебрах // *Сиб. мат. ж. 1976. Т. 17. № 2. С. 331–339.*

10. **Алексюк В. Н.** Теорема о миноранте. Счетность проблемы Магарам// *Матзаметки. 1977. Т. 21. № 5. С. 597–604.*

11. **Ловягин Ю. Н.** Булевы алгебры с достаточным числом непрерывных квазимер. Деп. в ВИНИТИ, № 3111–В97. 1997. 24 с.

12. **Ловягин Ю. Н.** О некоторых свойствах булевых алгебр // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2009». СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2009. С. 131–135.*

13. **Ловягин Ю. Н.** Регулярные и полунормированные булевы алгебры // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2011». СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2011. С. 146–148.*

14. **Ловягин Ю. Н.** Пример регулярной, но ненормированной булевы алгебры // *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2012». СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2012. С. 129–130.*

15. **Ловягин Ю. Н.** О проблеме нормируемости булевых алгебр // *Известия российского педагогического университета им. А. И. Герцена. 2013. № 154. С. 23–33.*

16. **Gaifman H.** Cjncerning measure on Boolean algebras // *Pacif. J. Math. 1964. V. 14, № 1. Pp. 61–73.*

**Summary**

**Lovyagin Yu. N.** Some remarks on the problem of the normability of Boolean algebras

We study the connection between the property of normability of a Boolean algebra and the existence on it of a semi-additive (o) -continuous essentially positive function. Criteria are given, under which the semi-normalized Boolean algebra has no measure.

*Keywords: Boolean algebra, measure, problem D. Magaram.*

**References**

1. **Poroshkin A. G.** *Teoriya mery i integrala* (Theory of measure and integral), Moscow: KomKniga, 2006, 184 p.

2. **Poroshkin A. G.** *Uporyadochennye mnozhestva. Bulevy algebry* (Ordered sets. Boolean algebras), Syktyvkar: Syktu State University, 1987, 85 p.

3. **Halmos P.** *Measure theory*, Berlin-Haidelberg-New York: Springer, 1950, 304 p.

4. **Kelley J.** *General topology*, Toronto-London-New York: D van Nostard company, 1957, 432 p.

5. **Vladimirov D. A.** *Bulevy algebry* (Boolean algebras), Moscow: Nauka, 1969, 318 p.

6. **Vladimirov D. A.** *Teoriya bulevyh algebr* (The theory of Boolean algebras), St. Petersburg: Publishing house of the St. Petersburg University, 2000, 616 p.

7. **Halmos P.** *Lectures on Boolean algebras*, Prinston, New-Jersey. D. van Nostard company, 1963, 96 p.

8. **Mayaram D.** An algebraic characterization of measure algebras, *Ann. Math.*, 1947, v. 48, № 1, pp. 154–167.

9. **Popov V. A.** Additivnye i poluadditivnye funkcii na bulevyh algebrah (Additive and semiadditive functions on Boolean algebras), *Sibirsk. mat.*, 1976, vol. 17, No 2, pp. 331–339.

10. **Alexyuk V. N.** Teorema o minorante. Schetnost' problemy Magaram (The Minorant Theorem. The countability of the problem of Magaramz), *Mathematics*, 1977, t. 21, No. 5, pp. 597–604.

11. **Lovyagin Yu. N.** *Bulevy algebry s dostatochnym chislom nepreryvnyh kvazimer* (Boolean algebras with a sufficient number of continuous quasimers), Syktyvkar: Dep. in VINITI, № 3111-B97, 1997, 24 p.

12. **Lovyagin Yu. N.** O nekotoryh svojstvah bulevyh algebr (On some properties of Boolean algebras), *Some actual problems of modern mathematics and mathematical education: Proceedings of the scientific conference «Herzen readings — 2009»*, SPb: RSPU them. A. I. Herzen, 2009, pp. 131–135.

13. **Lovyagin Yu. N.** Regulyarnye i polunormirovannye bulevy algebry (Regular and semi-normalized Boolean algebras), *Some actual problems of modern mathematics and mathematical education: Proceedings of the scientific conference «Herzen readings — 2011»*, SPb: RSPU them. A. I. Herzen, 2011, pp. 146–148.

14. **Lovyagin Yu. N.** Primer regulyarnoj, no nenormirovannoj bulevy algebry (An example of a regular but not normalized Boolean algebra), *Some actual problems of modern mathematics and mathematical education: Proceedings of the scientific conference «Herzen Readings – 2012»*, SPb: RSPU them. A. I. Herzen, 2012,pp. 129–130.

15. **Lovyagin Yu. N.** O probleme normiruemosti bulevyh algebr (On the problem of normability of Boolean algebras), *Proceedings of the Russian Pedagogical University. A. I. Herzen*, 2013, № 154, pp. 23–33.

16. **Gaifman H.** Cjncerning measure on Boolean algebras, *Pacif. J. Math.*, 1964, v. 14, № 1, pp. 61–73.

**Для цитирования:** Ловягин Ю. Н. Несколько замечаний о проблеме нормируемости булевых алгебр // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 3 (24). С. 43–55.*

**For citation:** Lovyagin Yu. N. Some remarks on the problem of the normability of Boolean algebras, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №3 (24), pp. 43–55.

*Санкт-Петербургский государственный университет*

*Поступила 01.09.2017*