МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 3 (24). 2017

УДК 517.162

GA-ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

С. И. Калинин

В работе рассматривается класс так называемых GA-выпуклых на промежутке функций. Приводится геометрическая характеризация таких функций, изучаются их свойства, в частности, устанавливаются неравенство Иенсена и его аналог. Формулируются достаточные условия GA-выпуклости и GA-вогнутости функции в терминах производных.
Ключевые слова: GA-выпуклая функция, GA-вогнутая функция, неравенство Иенсена, аналог неравенства Иенсена.

1. Определения и иллюстрации

Опираясь на работы [1,2], введем сначала необходимые определения, связанные с понятием GA-выпуклой функции.

Пусть $l \subseteq (0; +\infty)$ — произвольный промежуток числовой прямой Ox и $f : l \to \mathbf{R}$ — функция, заданная на этом промежутке.

Определение 1.1. Функцию f назовем GA-*выпуклой* на l, если для любого отрезка $[a; b] \subset l$ и любого числа $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1}$$

Если в условиях определения 1.1 для всех $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \tag{2}$$

то функцию f будем называть *строго* GA-*выпуклой* на рассматриваемом промежутке l.

Очевидно, строго GA-выпуклая функция является GA-выпуклой.

Замечание 1.1. В соответствии с тем, какое из неравенств: (2) или (1), характеризует функцию f, условимся говорить соответственно о GA-выпуклости данной функции в строгом или нестрогом смысле.

Замечание 1.2. В терминологии доклада [3] строго GA-выпуклая функция — $(0,1)$-выпуклая функция. Здесь в соответствии с определением 1.1 параметр 0 следует ассоциировать со средним геометрическим G значений a и b аргумента функции f, которое, как известно, есть среднее степенное порядка 0 этих значений. Аналогично, параметр 1 соответствует среднему арифметическому A чисел a и b, которое есть среднее степенное порядка 1 данных чисел.

Аналогично определяются GA-*вогнутая* и *строго* GA-*вогнутая* функции — для этого в соответствующих неравенствах (1)–(2) знак $\leq$ ($<$) следует поменять на знак $\geq$ ($>$) соответственно.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие сформулированные определения.

На интервале $(0;+\infty)$ функция $f(x) = c + \gamma \ln x$, где c и γ — вещественные константы, является как GA-выпуклой, так и GA-вогнутой, поскольку

$$f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) = c + \gamma \ln \left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) = c + \lambda\gamma \ln a + (1-\lambda)\gamma \ln b =$$

$$= \lambda(c + \gamma \ln a) + (1-\lambda)(c + \gamma \ln b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Из последнего следует, в частности, что и функция $f(x) = \ln x$, и функция $f(x) = c$ на всяком промежутке $l \subseteq (0;+\infty)$ являются GA-выпуклыми и GA-вогнутыми.

Функция $f(x) = x, x > 0$, является строго GA-выпуклой. Это следует из весового неравенства Коши для положительных чисел a и b

$$a^{\lambda}b^{1-\lambda} < \lambda a + (1-\lambda)b, a \neq b, \lambda \in (0;1),$$

реализующего неравенство (2).

Легко видеть, на интервале $(0;+\infty)$ будет строго GA-выпуклой и функция $f(x) = x + c$, где $c = const$.

Весовое неравенство Коши для двух положительных чисел позволяет просто обосновать также строгую GA-выпуклость функции $f(x) = x^q, x > o$, где q — произвольное отличное от нуля действительное число:

$$\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)^q = \left(a^q\right)^{\lambda}\left(b^q\right)^{1-\lambda} < \lambda a^q + (1-\lambda)b^q, a > 0, b > 0, a \neq b; \lambda \in (0;1).$$

Нетрудно видеть, что функция $f(x) = -x^2, x > 0$, будет строго GA-вогнутой.

Приведенные примеры функций говорят о том, что класс GA-выпуклых (вогнутых) строго или нет функций не пуст.

2. Геометрическая характеризация GA-выпуклости

GA-выпуклые функции можно охарактеризовать геометрически подобно тому, как это делается в учебных курсах анализа в отношении обычной выпуклости. Напомним, что если f — выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b] \subset l$ график сужения $f|_{[a;b]}$ функции f на этот отрезок всеми своими точками лежит не выше (невертикального) отрезка, соединяющего концы $(a;f(a))$ и $(b;f(b))$ данного графика. Невертикальные отрезки в плоскости $\mathbf{R}^2$ — это связные части графиков всевозможных линейных функций, которые являются как выпуклыми, так и вогнутыми функциями.

Для геометрической характеризации понятия GA-выпуклой функции введем в рассмотрение понятие логарифмической дуги (логарифмической кривой).

Определение 2.1. Всякую связную часть графика функции $y = c + \gamma \ln x$ $(-\infty < c, \gamma < +\infty, x > 0)$ условимся называть *логарифмической дугой*, или *логарифмической кривой*.

Существует ровно одна логарифмическая дуга, соединяющая две точки правой полуплоскости плоскости xOy, не лежащие на одной вертикали. Так, точки $M_1(x_1;y_1)$ $(x_1 > 0)$ и $M_2(x_2;y_2)$ $(x_2 > 0, x_2 \neq x_1)$ соединяются логарифмической дугой

$$y = \frac{y_1 \ln x_2 - y_2 \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} + \frac{y_2 - y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} \ln x. \tag{3}$$

Данный факт легко проверяется подстановкой координат указанных точек в уравнение (3).

Покажем, что логарифмическая дуга, задаваемая уравнением (3), есть единственная логарифмическая кривая, соединяющая точки M_1 и M_2. Для этого координаты данных точек подставим в общее уравнение логарифмической кривой $y = c + \gamma \ln x$; последнее позволяет записать систему уравнений относительно c и γ: $\begin{cases} y_1 = c + \gamma \ln x_1, \\ y_2 = c + \gamma \ln x_2. \end{cases}$ Решая систему, получаем $c = \frac{y_1 \ln x_2 - y_2 \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$, $\gamma = \frac{y_2 - y_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$. Найденные коэффициенты совпадают с соответствующими коэффициентами в (3).

Таким образом, действительно существует единственная логарифмическая дуга, проходящая через две точки правой полуплоскости плоскости xOy, не лежащие на одной вертикали.

Из (3) легко видеть, что если точки M_1 и M_2 лежат на одной горизонтали (в этом случае $y_1 = y_2$), то их соединяющая логарифмическая дуга вырождается в отрезок горизонтальной прямой $y = y_1$.

Рассмотрим сейчас геометрическую интерпретацию GA-выпуклости. Покажем, что если $f(x)$ — GA-выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого $x, x \in (a;b)$, выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f будет находиться не выше точки логарифмической дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$ с той же абсциссой x. Для этого, отправляясь от (3), составим уравнение данной логарифмической дуги

$$y = \frac{f(a)\ln b - f(b)\ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a}\ln x \tag{4}$$

и $x, x \in (a;b)$, представим в виде

$$x = a^{\log_{\frac{b}{a}}\frac{b}{x}} b^{\log_{\frac{a}{b}}\frac{a}{x}}. \tag{5}$$

Заметим при этом, что для показателей степеней в правой части представления (5) выполняются условия:

$$\log_{\frac{b}{a}}\frac{b}{x} \in (0;1), \log_{\frac{a}{b}}\frac{a}{x} \in (0;1), \log_{\frac{b}{a}}\frac{b}{x} + \log_{\frac{a}{b}}\frac{a}{x} = 1.$$

Используя последнее и условие GA-выпуклости функции f, ее значение $f(x)$ оценим сверху следующим образом:

$$f(x) = f\left(a^{\log_{\frac{b}{a}}\frac{b}{x}} \cdot b^{\log_{\frac{a}{b}}\frac{a}{x}}\right) \leqslant \log_{\frac{b}{a}}\frac{b}{x} \cdot f(a) + \log_{\frac{a}{b}}\frac{a}{x} \cdot f(b).$$

Но в полученной оценке выражение $\log_{\frac{b}{a}}\frac{b}{x} \cdot f(a) + \log_{\frac{a}{b}}\frac{a}{x} \cdot f(b)$, легко видеть, преобразуется к виду

$$\frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a} f(a) + \frac{\ln a - \ln x}{\ln a - \ln b} f(b),$$

или

$$\frac{f(a)\ln b - f(b)\ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a}\ln x.$$

Отсюда заключаем, что точка $(x; f(x))$, $x \in (a;b)$, графика функции f лежит не выше точки $\left(x; \frac{f(a)\ln b - f(b)\ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{f(b)-f(a)}{\ln b - \ln a}\ln x\right)$ логарифмической дуги (4).

Аналогичными рассуждениями, очевидно, нетрудно показать, что если $f(x)$ — строго GA-выпуклая на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l, и любого $x, x \in (a; b)$, выполняется условие: точка $(x; f(x))$ графика функции f лежит ниже точки логарифмической дуги, соединяющей точки $(a; f(a))$, $(b; f(b))$ с той же абсциссой x.

Соответствующую геометрическую характеризацию читатель может сформулировать и в отношении GA-вогнутых функций.

3. Достаточные условия GA-выпуклости функции

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $l, l \subseteq (0; +\infty)$ и внутри его дважды дифференцируема. В данных условиях введем в рассмотрение величину $\Delta(x) = f'(x) + xf''(x)$, $x \in l^0$, где l^0 — внутренняя часть l. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Если внутри промежутка l выполняется условие $\Delta(x) \geq 0$, то функция $f(x)$ является GA-выпуклой на этом промежутке. Если же внутри l $\Delta(x) \leq 0$, то $f(x)$ будет GA-вогнутой на рассматриваемом промежутке.

Доказательство. Пусть $[a; b]$ — произвольный отрезок из промежутка l. Покажем, что при условии $\Delta(x) \geq 0$ для любого x, $a < x < b$, будет выполняться неравенство $f(x) \leq y(x)$, где $y(x)$ — функция (4), задающая логарифмическую кривую, соединяющую концы графика функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Последнее, согласно геометрической интерпретации GA-выпуклости, будет означать указанную выпуклость данной функции.

Рассмотрим разность $y(x) - f(x)$. Для нее имеем:

$$y(x) - f(x) = \frac{f(a)\ln b - f(b)\ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a}\ln x - f(x) =$$

$$= \log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} \cdot f(a) + \log_{\frac{b}{a}} \frac{x}{a} \cdot f(b) - f(x) =$$

$$= \log_{\frac{b}{a}} \frac{b}{x} \cdot (f(a) - f(x)) + \log_{\frac{b}{a}} \frac{x}{a} \cdot (f(b) - f(a)) =$$

$$= \frac{\ln \frac{b}{x} \cdot \ln \frac{x}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \left(\frac{f(b) - f(x)}{\ln b - \ln x} - \frac{f(a) - f(x)}{\ln a - \ln x} \right).$$

В последнем произведении множитель, записанный в виде дроби перед скобками, очевидно, положительный, потому нам достаточно доказать неотрицательность выражения $A = \frac{f(b)-f(x)}{\ln b - \ln x} - \frac{f(a)-f(x)}{\ln a - \ln x}$.

Для этого выражения по классической теореме Коши имеем представление $A = \frac{\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}} - \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}}{} = \eta f'(\eta) - \xi f'(\xi)$, где ξ и η — некоторые средние точки, удовлетворяющие условию $a < \xi < x < \eta < b$. Применяя теперь к разности $\eta f'(\eta) - \xi f'(\xi)$ формулу Лагранжа конечных приращений, получаем:

$$A = (f'(\zeta) + \zeta f''(\zeta))\,(\eta - \xi) = \Delta(\zeta)(\eta - \xi),$$

где ζ — некоторая точка, лежащая между точками ξ и η. Так как $\Delta(\zeta) \geq 0$, то отсюда имеем $y(x) - f(x) \geq 0$ или $f(x) \leq y(x)$, $a < x < b$. Нужное показано.

Второе утверждение теоремы устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Техника доказательства установленной теоремы позволяет заключить, что если внутри промежутка l для функции $f(x)$ выполняется условие $\Delta(x) > 0$, то данная функция будет строго GA-выпуклой на l. Аналогично условие $\Delta(x) < 0$, $x \in l^0$, влечет факт строгой GA-вогнутости функции $f(x)$ на промежутке l.

Замечание 3.2. Теорема 3.1 есть своеобразный аналог соответствующего утверждения о достаточных условиях обычной выпуклости функции на промежутке в терминах ее второй производной.

Приведем иллюстрации применения теоремы 3.1.

1. Для функции $f(x) = e^x, x > 0$, величина $\Delta(x) = e^x + xe^x$, очевидно, положительна, следовательно, данная функция будет строго GA-выпуклой.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \mathrm{ch}x$, $x > 0$. Для нее величина $\Delta(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + x\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ также положительна, значит, и эта функция является строго GA-выпуклой.

Точно так же можно показать строгую GA-выпуклость функции $f(x) = \mathrm{sh}x, x > 0$.

3. На промежутке $(0;1]$ будет строго GA-выпуклой функция $f(x) = \frac{1-x}{x}$, так как для нее величина $\Delta(x)$ имеет вид: $\Delta(x) = -\frac{1}{x^2} + x \cdot \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^2}$. Очевидно, эта величина внутри промежутка $(0;1]$ положительна.

4. Читатель без труда может подтвердить строгую GA-выпуклость функции $f(x) = x^q$, $x > 0$, $q \in \mathbf{R}$, $q \neq 0$, еще раз. Для этого следует составить величину $\Delta(x)$ для данной функции и показать, что $\Delta(x) = q^2 x^{q-1} > 0$.

5. Функция $g(x) = \ln\frac{1-x}{x}$, $x \in (0;1)$, является строго GA-вогнутой, так как на интервале $(0;1)$ величина $\Delta(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ отрицательна.

6. Для логарифмической функции $y = c + \gamma \ln x$, $x > 0$, величина $\Delta(x)$

тождественно равна 0. Следовательно, данная функция и GA-выпукла, и GA-вогнута.

4. Свойства GA-выпуклых функций

Рассмотрим по порядку свойства GA-выпуклых и GA-вогнутых на промежутке $l \subseteq (0; +\infty)$ функций, следуя схеме изучения обычных выпуклых функций.

1^0. Сумма $f+g$ GA-выпуклых (строго GA-выпуклых) на промежутке l функций f и g есть GA-выпуклая (строго GA-выпуклая) на данном промежутке функция.

Сумма $f+g$ GA-вогнутых (строго GA-вогнутых) на рассматриваемом промежутке функций f и g является GA-вогнутой (строго GA-вогнутой) на данном промежутке функцией.

2^0. Если f — GA-выпуклая на промежутке l функция, а функция g — строго GA-выпуклая на данном промежутке, то их сумма $f+g$ есть строго GA-выпуклая на l функция.

Сформулированные свойства легко выводятся из определений соответствующих понятий. Очевидным является следующее свойство.

3^0. Если функция f — GA-выпуклая (строго GA-выпуклая) на промежутке l, то функция $-f$ будет GA-вогнутой (строго GA-вогнутой) на этом промежутке.

Если функция f — GA-вогнутая (строго GA-вогнутая) на промежутке l, то функция $-f$ будет GA-выпуклой (строго GA-выпуклой) на этом промежутке.

Сформулируем свойство, касающееся произведения GA-выпуклых функций.

4^0. Если f и g — GA-выпуклые, неотрицательные и обе не убывающие или обе не возрастающие на промежутке l функции, то их произведение fg есть также GA-выпуклая на данном промежутке функция.

Доказательство. В имеющихся условиях для функций f и g будут выполняться неравенства

$$f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

$$g\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) \leq \lambda g(a) + (1-\lambda) g(b), \qquad (6)$$

$$[a; b] \subset l, \lambda \in [0; 1].$$

Покажем, что тогда будет выполняться и неравенство

$$(fg)\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) \leq \lambda (fg)(a) + (1-\lambda)(fg)(b), \qquad (7)$$

характеризующее GA-выпуклость произведения fg.

Действительно, в силу неотрицательности функций f и g неравенства (6) можно перемножить, тогда будем иметь:

$$(fg)\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) \leq (\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b))\,(\lambda g(a) + (1-\lambda)g(b)) =$$

$$= \lambda^2 f(a)g(a) + (1-\lambda)^2 f(b)g(b) + \lambda(1-\lambda)[f(b)g(a) + f(a)g(b)] =$$

$$= \lambda f(a)g(a) + (1-\lambda)f(b)g(b) +$$

$$+\lambda(1-\lambda)[f(b)g(a) + f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(b)] =$$

$$= \lambda f(a)g(a) + (1-\lambda)f(b)g(b) - \lambda(1-\lambda)[(f(b) - f(a))(g(b) - g(a))].$$

Так как выражение, заключенное в последние квадратные скобки, неотрицательно, то отсюда имеем (7). Свойство 4^0 установлено.

Аналогичной техникой устанавливается следующее свойство.

5^0. Если f и g — GA-вогнутые и неотрицательные на промежутке l функции, при этом одна из них является неубывающей, а другая невозрастающей на l, то их произведение fg есть также GA-вогнутая на данном промежутке функция.

Приведем два свойства, связанных с композицией функций.

6^0. Если функция f является GA-выпуклой на промежутке $l \subseteq (0;+\infty)$ числовой прямой Ox, а функция g — выпуклой и не убывающей на промежутке L $(f(l) \subset L)$ числовой прямой Oy, то композиция $g \circ f$ — GA-выпукла на l.

Справедливость утверждения вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$(g \circ f)\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right) = g\left(f\left(a^{\lambda}b^{1-\lambda}\right)\right) \leq g\left(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\right) \leq$$

$$\leq \lambda g\left(f(a)\right) + (1-\lambda)g\left(f(b)\right) = \lambda(g \circ f)(a) + (1-\lambda)(g \circ f)(b),$$

$$[a;b] \subset l, \lambda \in [0;1].$$

В данной цепочке первое неравенство записано на основании GA-выпуклости функции f на промежутке l и неубывания функции g на промежутке L, а второе — на основании выпуклости g.

Аналогично устанавливается следующее свойство.

7^0. Если функция f является GA-вогнутой на промежутке $l \subseteq (0;+\infty)$ числовой прямой Ox, а функция g — вогнутой и неубывающей на промежутке L $(f(l) \subset L)$ числовой прямой Oy, то композиция $g \circ f$ — GA-вогнута на l.

Введем в рассмотрение понятие *квази*-GA-*выпуклой* функции.

Определение 4.1. Пусть $f : l \to \mathbf{R}$ — функция, заданная на промежутке $l \subseteq (0; +\infty)$. Условимся называть ее *квази*-GA-*выпуклой* на l, если для любого отрезка $[a; b]$, принадлежащего l, и любого числа $\lambda, \lambda \in [0; 1]$, будет выполняться неравенство

$$f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \leq \sup\{f(a), f(b)\}.$$

Можно сформулировать следующие очевидные предложения, связанные с данным определением.

8^0. Всякая GA-выпуклая на промежутке l функция является квази-GA-выпуклой на этом промежутке.

9^0. Если функция f является GA-вогнутой на промежутке l, то функция $-f$ будет квази-GA-выпуклой на этом промежутке.

Рассмотрим сейчас некоторые интегральные свойства GA-выпуклых функций, порождающих своеобразные аналоги неравенств Адамара для обычных выпуклых функций.

10^0. Если $f(x)$ — GA-выпуклая на промежутке $l \subseteq (0; +\infty)$ функция, интегрируемая по Риману на всяком отрезке этого промежутка, то для любого отрезка $[a; b]$ из l

$$\int_a^b f(x)dx \leq bf(b) - af(a) - (b-a)\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a}. \tag{8}$$

Доказательство. В интеграле $\int_a^b f(x)dx$ сделаем замену переменной, полагая $x = a^{\lambda} b^{1-\lambda}$, $\lambda \in [0; 1]$. Будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx = b \ln\frac{a}{b} \int_1^0 f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} d\lambda = b \ln\frac{b}{a} \int_0^1 f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} d\lambda.$$

Последний интеграл оценим сверху, используя условие GA-выпуклости $f(x)$ на промежутке l и метод вычисления интеграла Римана по частям:

$$b \ln\frac{b}{a} \int_0^1 f\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} d\lambda \leq b \ln\frac{b}{a} \int_0^1 \left(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} d\lambda =$$

$$= bf(b) - af(a) - (b-a)\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a}.$$

Нужное показано.

Замечание 4.1. Если в условиях свойства 10^0 функция $f(x)$ — GA-вогнутая, то для нее будет выполняться неравенство

$$\int_a^b f(x)dx \geq bf(b) - af(a) - (b-a)\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a}, \tag{9}$$

отличающееся от (8) знаком неравенства.

Замечание 4.2. В оценках (8)–(9) знаки неравенств будут строгими, если соответственно функция $f(x)$ будет строго GA-выпуклой или строго GA-вогнутой.

Замечание 4.3. Очевидно, неравенство (8) можно переписать в виде

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{bf(b)-af(a)}{b-a} - \frac{f(b)-f(a)}{\ln b - \ln a}.$$

Последнее неравенство характеризует оценку сверху среднего значения GA-выпуклой функции на отрезке $[a;b]$.

Использованная при доказательстве свойства 10^0 замена переменной позволяет обосновать и следующие свойства.

11^0. Если $f(x)$ — GA-выпуклая на промежутке $l \subseteq (0;+\infty)$ функция, интегрируемая по Риману на всяком отрезке этого промежутка, то для любого отрезка $[a;b]$ из l

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{10}$$

Если в приведенных условиях $f(x)$ — строго GA-выпуклая функция, то в оценке (10) знак неравенства будет строгим.

12^0. Если f и g — неотрицательные GA-выпуклые на промежутке $l \subseteq (0;+\infty)$ функции, интегрируемые по Риману на всяком отрезке этого промежутка, то для любого отрезка $[a;b]$ из l

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x}dx \leq \frac{f(a)g(a)+f(b)g(b)}{3} + \frac{f(b)g(a)+f(a)g(b)}{6}.$$

Как следствие данного свойства, получаем следующее свойство.

13^0. В условиях свойства 11^0 справедлива оценка

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f^2(x)}{x}dx \leq \frac{f^2(a)+f(a)f(b)+f^2(b)}{3}.$$

Свойства, аналогичные свойствам 11^0–13^0, мы предлагаем читателю сформулировать в отношении GA-вогнутых функций.

5. Неравенство Иенсена и его аналог

В данном разделе мы рассмотрим еще два важных свойства GA-выпуклых (вогнутых) функций — выполнение для таких функций неравенства Иенсена и его аналога. Упоминаемые свойства сформулируем в виде теорем.

Теорема 5.1. Пусть f — GA-выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке $l \subseteq (0; +\infty)$ функция; $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные числа из l; $\lambda_k \in (0;1)$, $k = 1, \ldots, n$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Тогда справедливо неравенство

$$f\left(a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}\right) \leq \lambda_1 f(a_1) + \ldots + \lambda_n f(a_n), \tag{11}$$

в котором равенство достигается только в двух случаях: 1) f — логарифмическая функция вида $c + \gamma \ln x$, где c и γ — вещественные константы; 2) $a_1 = \ldots = a_n$.

Доказательство. Обоснование выполнения неравенства (11) проведем методом математической индукции.

Установим сначала базу индукции. Покажем, что при $n = 2$ справедливо неравенство

$$f\left(a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2}\right) \leq \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2), a_1, a_2 \in l; \tag{12}$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \in (0;1), \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Но справедливость (12) следует из определений GA-выпуклой и строго GA-выпуклой функции.

Выясним условия достижения равенства в (12). Если функция f будет логарифмической функцией вида $c + \gamma \ln x$, то в (12) знак неравенства будет заменяться знаком равенства (см. соответствующий пример GA-выпуклой функции в разделе 1). Если же f не является логарифмической функцией, то из геометрической трактовки GA-выпуклости функции следует, что в (12) знак равенства будет достигаться только при $a_1 = a_2$.

Сделаем индукционное предположение: пусть неравенство (11) выполняется при $n = k$, $k \geq 2$, то есть справедливо соотношение

$$f\left(a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\lambda_k}\right) \leq \lambda_1 f(a_1) + \ldots + \lambda_k f(a_k), \tag{13}$$
$$a_i \in l, i = 1, \ldots, k; \lambda_i \in (0;1), i = 1, \ldots, k, \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1,$$

при этом равенство в (13) будет достигаться лишь в двух случаях: 1) если f — логарифмическая функция вида $c + \gamma \ln x$; 2) если $a_1 = \ldots = a_k$.

Реализуем индукционный переход: покажем, что в имеющихся условиях будет выполняться неравенство

$$f\left(a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k}\cdot a_{k+1}^{\lambda_{k+1}}\right)\le\lambda_1 f(a_1)+\ldots+\lambda_k f(a_k)+\lambda_{k+1}f(a_{k+1}),\quad(14)$$

$$a_i\in l, i=1,\ldots,k+1; \lambda_i\in(0;1), i=1,\ldots,k+1, \lambda_1+\ldots+\lambda_{k+1}=1,$$

в котором равенство может достигаться только тогда, когда f будет логарифмической функцией или когда $a_1=\ldots=a_{k+1}$.

Оценим левую часть (14) следующим образом:

$$f\left(a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k}\cdot a_{k+1}^{\lambda_{k+1}}\right)=f\left(a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_{k-1}^{\lambda_{k-1}}\cdot\left(a_k^{\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}a_{k+1}^{\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}\right)^{\lambda_k+\lambda_{k+1}}\right)\le$$

$$\le\lambda_1 f(a_1)+\ldots+\lambda_{k-1}f(a_{k-1})+(\lambda_k+\lambda_{k+1})f\left(a_k^{\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}a_{k+1}^{\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}\right)\le$$

$$\le\lambda_1 f(a_1)+\ldots+\lambda_{k-1}f(a_{k-1})+(\lambda_k+\lambda_{k+1})\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}f(a_k)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}f(a_{k+1})\right)=\lambda_1 f(a_1)+\ldots+\lambda_{k-1}f(a_{k-1})+\lambda_k f(a_k)+\lambda_{k+1}f(a_{k+1}).$$

В приведенных соотношениях первое из неравенств записывается на основании индукционного предположения, а второе — на основании базы индукции. Данные неравенства будут переходить в равенства, только если f будет логарифмической функцией или если $a_1=\ldots=a_{k-1}=$ $=a_k^{\frac{\lambda_k}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}=a_{k+1}^{\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}}$ и $a_k=a_{k+1}$, то есть если $a_1=\ldots=a_{k-1}=a_k=$ $=a_{k+1}$. Неравенство (11) полностью обосновано, теорема 5.1 доказана.

Замечание 5.1. Ясно, что если в условиях теоремы 5.1 f является GA-вогнутой в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функцией, то неравенство (11) перейдет в неравенство

$$f\left(a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}\right)\ge\lambda_1 f(a_1)+\ldots+\lambda_n f(a_n).\quad(15)$$

Условия достижения равенства в (15) будут теми же, что и для неравенства (11).

Неравенства (11) и (15) условимся называть *неравенствами Иенсена* для GA-выпуклой и GA-вогнутой в строгом или нестрогом смысле функции соответственно.

В качестве иллюстрации применения неравенства Иенсена для GA-выпуклой функции приведем простое доказательство обобщенного (весового) неравенства Коши

$$a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \tag{16}$$

для положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и набора положительных весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1)$.

С этой целью применим неравенство (11) к GA-выпуклой функции $f(x) = x, x > 0$. Мы сразу получаем обсуждаемое неравенство. Очевидно, равенство в нем может достигаться только при условии $a_1 = \ldots = a_n$.

Отметим, что среди всех известных нам доказательств неравенства (16) приведенное — самое короткое, оно занимает минимум места.

Перейдем к рассмотрению неравенства для GA-выпуклой строго или нет функции, схожего по записи с неравенством (11). Упоминаемое неравенство мы условимся называть его аналогом. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. Пусть f — GA-выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке $l \subseteq (0; +\infty)$ функция; $[a; b]$ — произвольный отрезок, принадлежащий l; $x_1, \ldots, x_n$ — произвольный кортеж чисел из этого отрезка; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1)$ — произвольный набор положительных весов. В данных условиях справедливо неравенство

$$f\left(\frac{ab}{\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}}\right) \leq f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k), \tag{17}$$

в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда или f — логарифмическая функция вида $c + \gamma \ln x$, где c и γ — вещественные константы, или все числа $x_1, \ldots, x_n$ совпадают либо с a, либо с b.

Доказательство данной теоремы проведем по схеме обоснования аналога неравенства Иенсена для выпуклых в обычном смысле функций (см., напр., [4, с. 375]), но сначала установим следующую вспомогательную лемму.

Лемма. Если функция f GA-выпукла на отрезке $[a; b]$, $[a; b] \subset \subset (0; +\infty)$, в строгом или нестрогом смысле, то для любого x, принадлежащего этому отрезку, будет выполняться неравенство

$$f\left(\frac{ab}{x}\right) \leq f(a) + f(b) - f(x), \tag{18}$$

в котором равенство достигается только тогда, когда или функция f — логарифмическая функция вида $c+\gamma\ln x$ (c и γ — вещественные константы), или $x\in\{a,b\}$.

Доказательство. Отметим, во-первых, что точка $\frac{ab}{x}$ принадлежит отрезку $[a;b]$. Это следует из цепочки неравенств:

$$a\le x\le b \Leftrightarrow \frac{1}{a}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{1}{b}\Leftrightarrow b\ge\frac{ab}{x}\ge a.$$

Значит, значение $f\left(\frac{ab}{x}\right)$ в левой части неравенства (18) существует, а само это неравенство по записи корректно.

Из включения $x\in[a;b]$ следует, что существует $\lambda\in[0;1]$, такое, что будет иметь место представление $x=a^{\lambda}b^{1-\lambda}$. Выразим через λ значение $\frac{ab}{x}$:

$$\frac{ab}{x}=a^{1-\lambda}b^{\lambda}.$$

Тогда в силу GA-выпуклости функции f будем иметь:

$$f\left(\frac{ab}{x}\right)=f\left(a^{1-\lambda}b^{\lambda}\right)\le(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)= \tag{19}$$

$$=f(a)+f(b)-\lambda f(a)-(1-\lambda)f(b)\le f(a)+f(b)-f\left(a^{\lambda}+b^{1-\lambda}\right)=$$

$$=f(a)+f(b)-f(x). \tag{20}$$

Неравенство (18) доказано.

Выясним условия достижения равенства в нем. Для этого следует осмыслить условия достижения равенства в (19) и (20).

Если f — логарифмическая функция, то легко видеть, что равенство достигается и в оценке (19), и в оценке (20). Если же f не является логарифмической функцией, то в каждой из данных оценок равенство возможно лишь при $\lambda=0$ или $\lambda=1$, то есть при совпадении x с b или a. Соотношение (18) полностью обосновано, лемма доказана.

Перейдем к *доказательству* теоремы 5.2. Установим сначала само неравенство (17), а затем осмыслим условия достижения в нем равенства.

Прежде всего, отметим, что значение $f\left(\frac{ab}{\prod_{k=1}^{n}x_k^{\lambda_k}}\right)$ существует, поскольку весовое среднее геометрическое $\prod_{k=1}^{n}x_k^{\lambda_k}$ чисел $x_1,\dots,x_n$ есть точка из отрезка $[a;b]$. Оценим значение $f\left(\frac{ab}{\prod_{k=1}^{n}x_k^{\lambda_k}}\right)$ сверху, используя неравенство Иенсена (11) для GA-выпуклых функций. Будем иметь:

$$f\left(\frac{ab}{\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}}\right) = f\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{ab}{x_k}\right)^{\lambda_k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f\left(\frac{ab}{x_k}\right). \qquad (21)$$

Но в силу леммы

$$f\left(\frac{ab}{x_k}\right) \le f(a) + f(b) - f(x_k), k = 1, \ldots, n, \qquad (22)$$

значит,

$$f\left(\frac{ab}{\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(f(a) + f(b) - f(x_k)\right) = f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

то есть само соотношение (17) установлено.

Ясно, что равенство в нем будет достигаться только тогда, когда оно будет иметь место и в неравенстве (21), и в неравенствах (22).

В случае, когда функция f является логарифмической, отмеченное условие, легко проверить, выполняется. Если же f не является таковой, то в (21) равенство может достигаться только при условии

$$\frac{a+b}{x_1} = \ldots = \frac{a+b}{x_n}, \qquad (23)$$

а в неравенствах (22) — при условии $x_k \in \{a, b\}$, $k = 1, \ldots, n$. Но из (23) следует, что $x_1 = \ldots = x_n$, значит, в рассматриваемой ситуации должно быть или $x_1 = \ldots = x_n = a$, или $x_1 = \ldots = x_n = b$. Неравенство (17) полностью обосновано, теорема 5.2 доказана.

Замечание 5.2. Если в условиях теоремы 5.2 f является GA-вогнутой в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функцией, то неравенство (17) перейдет в неравенство

$$f\left(\frac{ab}{\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}}\right) \ge f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \qquad (24)$$

Условия достижения равенства в (24) будут теми же, что и для неравенства (17).

Неравенства (17) и (24) назовем *аналогами неравенства Иенсена* для GA-выпуклой и GA-вогнутой в строгом или нестрогом смысле функции соответственно.

Приведем одно следствие теоремы 5.2.

Следствие. Пусть f — GA-выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке $l \subseteq (0,+\infty)$ функция; $x_1,\ldots,x_n$ — произвольный набор чисел из этого промежутка, перенумерованных в порядке неубывания; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $(\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1)$ — произвольный набор положительных весов. Тогда справедливо неравенство

$$f\left(\frac{x_1x_n}{\prod_{k=1}^n x_k^{\lambda_k}}\right) \le f(x_1)+f(x_n)-\sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \tag{25}$$

в котором равенство достигается только в случаях: 1) f — логарифмическая функция вида $c+\gamma\ln x$; 2) $x_1=\ldots=x_n$.

Доказательство этого утверждения, легко видеть, следует из теоремы 5.2, если в ней положить $a=x_1, b=x_n$.

Замечание 5.3. Требование монотонности последовательности $x_1,\ldots,x_n$ в условиях следствия, очевидно, можно заменить таким: в данной последовательности $x_1=\min_{1\le k\le n}\{x_k\}$, $x_n=\max_{1\le k\le n}\{x_k\}$.

Ясно, что если в условиях следствия функция f будет GA-вогнутой (строго или нет) на промежутке l, то для нее справедливо неравенство

$$f\left(\frac{x_1x_n}{\prod_{k=1}^n x_k^{\lambda_k}}\right) \ge f(x_1)+f(x_n)-\sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k). \tag{26}$$

Условия достижения равенства в (26) те же, что и для неравенства (25).

Рассмотрим одно применение сформулированного выше следствия. Пусть для промежутка l числовой прямой выполняется включение $l\subset(0;+\infty)$ и $0\notin l$. Положим $\overline{A}_n = x_1+x_n-A_n$, $\overline{G}_n=\frac{x_1x_n}{G_n}$, где $A_n=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n$, $G_n=x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}$ — весовые средние арифметическое и геометрическое чисел $x_1,\ldots,x_n$ из l с весами $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $(\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1)$. Мы считаем, что рассматриваемые числа перенумерованы в порядке неубывания. Хорошо известно, что для величин A_n, G_n справедливо неравенство Коши $G_n\le A_n$, в котором равенство возможно, только если $x_1=\ldots=x_n$. Покажем, что имеет место *аналог* данного неравенства для величин $\overline{A}_n,\overline{G}_n$ — неравенство

$$\overline{G}_n \le \overline{A}_n, \tag{27}$$

в котором равенство (как и в неравенстве Коши) достигается тогда и только тогда, когда $x_1=\ldots=x_n$.

Для доказательства (27) применим неравенство (25) к GA-выпуклой функции $f(x) = x, x > 0$:

$$\frac{x_1 x_n}{\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}} \leq x_1 + x_n - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

а это есть неравенство (27). Равенство в нем будет достигаться только при условии $x_1 = \ldots = x_n$, ибо функция $f(x) = x$ не является логарифмической.

Замечание 5.4. Предложенное обоснование неравенства (27) предлагаем читателю сравнить с его доказательством в [5, с. 2].

Список литературы

1. **Guan Kaizhong** GA-convexity and its applications // *Anal. Math. 2013. 39. № 3. Pp. 189–208.*

2. **Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, and Xiao-Hui Zhang**. The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application // *J. of Inequal. and Applics., Vol. 2010. Article ID 507560, 11 pages, doi:10.1155/2010/507560.*

3. **Калинин С. И.** (α, β)-выпуклые функции, их свойства и некоторые применения // *Уфимская международная математическая конференция. Сборник тезисов / отв. ред. Р. Н. Гарифуллин. Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. С. 75–76.*

4. **Abramovich S., Klaričić Bakula M., Matić M. and Pečarić J.** A variant of Jensen–Steffensen's inequality and quasi-arithmetic means // *J. Math. Anal. Applics. 307. 2005. Pp. 370–385.*

5. **Mercer A. McD.** A variant of Jensen's inequality // *J. Inequal. In Pure and Appl. Math. Vol. 4. Issue 4. Article 73. 2003. Pp. 1–2.*

Summary

Kalinin S. I. GA-convex functions

The paper is devoted to the class of socalled GA-convex functions on the interval. A geometric characterization of such functions is given, their properties are studied, in particular, the Jensen inequality and its analogue are established. Sufficient conditions for the GA-convexity and

GA-concavity of a function in terms of derivatives are formulated.
Keywords: GA-convex function, GA-concave function, Jensen's inequality, analogue of Jensen's inequality.

References

1. **Guan Kaizhong.** GA-convexity and its applications, *Anal. Math. 2013*, 39, № 3, pp. 189–208.

2. **Xiao-Ming Zhang, Yu-Ming Chu, and Xiao-Hui Zhang.** The Hermite-Hadamard type inequality of GA-convex functions and its application, *J. of Inequal. and Applics.*, Vol. 2010, Article ID 507560, 11 pages, doi:10.1155/2010/507560.

3. **Kalinin S. I.** (α, β)-vypuklye funkcii, ix svojstva i nekotorye primeneniya ((α, β)-convex functions, their properties and some applications), *Ufa international mathematical conference. Abstracts / Executive editor R. N. Garifullin.* Ufa: RITS Bashgu, 2016, pp. 75–76.

4. **Abramovich S., Klaričić Bakula M., Matić M. and Pečarić J.** A variant of Jensen–Steffensen's inequality and quasi-arithmetic means, *J. Math. Anal. Applics.*, 307 (2005), pp. 370–385.

5. **Mercer A. McD.** A variant of Jensen's inequality, *J. Inequal. In Pure and Appl. Math.*, Vol. 4, Issue 4, Article 73, 2003, pp. 1–2.

Для цитирования: Калинин С. И. GA-выпуклые функции // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 3 (24). С. 25–42.*

For citation: Kalinin S. I. GA-convex functions, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №3 (24), pp. 25–42.

ВятГУ *Поступила 25.09.2017*