НАСТАВНИК–УЧЕНИК

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (22). 2017

УДК 517.0

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУММЫ ТРЕХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ

А. Б. Певный, М. Н. Юркина

Для $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ устанавливается неравенство $f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f(1)$, где числа x, y, z положительны и удовлетворяют условиям $x + y + z = 1$ или $xyz = 1$.
Ключевые слова: квадратный трехчлен, экстремальная задача, минимум, ограничение, неравенство.

1. Введение

В статье Ф. М. Даннана и С. М. Ситника [1] доказана

ЛЕММА 1. *Пусть x, y, z — положительные числа, такие, что $xyz = 1$. Тогда*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3(x + y + z) + 6 \geq 0. \tag{1}$$

Неравенство (1) обращается в равенство при $x = y = z = 1$.

Введем полином $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Тогда (1) перепишется в виде

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f(1). \tag{2}$$

Возникает вопрос, для каких квадратных трехчленов $f(x) = ax^2+bx+c$, $a > 0$ выполняется неравенство (2) при ограничениях $xyz = 1$. Начнем с более легкого ограничения $x + y + z = 1$.

2. Неравенства при ограничении $x + y + z = 1$

Можно от рассмотрения неравенств перейти к экстремальным задачам. Зафиксируем полином $f(x) = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом $a > 0$. Рассмотрим задачу минимизации

$$f(x) + f(y) + f(z) \longrightarrow \min \tag{3}$$

при ограничениях

$$x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x + y + z = 1. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 1. *Единственной точкой минимума в задаче (3)–(4) является точка* $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим среднее арифметическое $A = \frac{1}{3}(x+y+z)$ и среднее квадратическое $Q = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)}$ чисел x, y, z. Хорошо известно неравенство $A \le Q$, причем равенство достигается только тогда, когда $x = y = z$. Целевую функцию в (3) можно записать так:

$$L(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + b(x + y + z) + 3c.$$

В силу ограничения (4) справедливо неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3Q^2 \ge 3A^2 = 3\left(\frac{x + y + z}{3}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

причем равенство получается только при $x = y = z$. Отсюда

$$L(x, y, z) \ge \frac{1}{3}a + b + 3c = L\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

В любой точке $(x, y, z) \ne \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ будет выполнено строгое неравенство $Q > A$ и тогда

$$L(x, y, z) > L\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right).$$

Теорема доказана. $\square$

3. Неравенства при ограничении $xyz = 1$

Пусть по-прежнему $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Положим $\alpha = -b/(2a)$ — это точка минимума функции $f(x)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\alpha \leq 3/\sqrt[3]{4} \approx 1.89$, то справедливо неравенство*

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f(1) \tag{5}$$

для любых $x,\ y,\ z > 0$, таких, что $xyz = 1$.

Доказательство. Имеем $f(x) = a(x-\alpha)^2 + c - a\alpha^2$. Поэтому достаточно доказать неравенство (5) для полинома $f_0(x) = (x-\alpha)^2$.

Пусть (x, y, z) — точка минимума функции

$$L(x, y, z) = f_0(x) + f_0(y) + f_0(z)$$

при ограничениях $x,\ y,\ z > 0$, $xyz = 1$. Тогда существует множитель Лагранжа λ, такой, что

$$2(x-\alpha) = \lambda yz = \lambda \frac{1}{x},$$

$$2(y-\alpha) = \lambda xz = \lambda \frac{1}{y},$$

$$2(z-\alpha) = \lambda xy = \lambda \frac{1}{z},$$

отсюда

$$2(x^2 - \alpha x) = 2(y^2 - \alpha y) = 2(z^2 - \alpha z) = \lambda.$$

Таким образом, числа $x,\ y,\ z$ являются корнями одного квадратного уравнения $2t^2 - 2\alpha t - \lambda = 0$. Поэтому два числа из трех равны. Точка минимума необходимо имеет вид $\left(x, x, \frac{1}{x^2}\right)$, $\left(x, \frac{1}{x^2}, x\right)$ или $\left(\frac{1}{x^2}, x, x\right)$. Достаточно рассмотреть первый случай. Для нахождения x решаем задачу

$$\varphi(x) := (x-\alpha)^2 + (x-\alpha)^2 + \left(\frac{1}{x^2} - \alpha\right)^2 \longrightarrow \min_{x>0}.$$

Решим уравнение

$$\varphi'(x) = 4(x-\alpha) - 4\left(\frac{1}{x^2} - \alpha\right)\frac{1}{x^3} = 0.$$

Умножив на x^5, придем к уравнению

$$x^6 - \alpha x^5 - 1 + \alpha x^2 = x^6 - 1 - \alpha x^2(x^3 - 1) = 0.$$

Один корень $x = 1$, а остальные находятся из уравнения

$$g(x) := x^3 + 1 - \alpha x^2 = 0.$$

Положительным корнем уравнения $g'(x) := 3x^2 - 2\alpha x = 0$ является точка $x_* = \frac{2\alpha}{3}$ — это точка минимума функции $g(x)$. Если

$$g(x_*) = \frac{8\alpha^3}{27} + 1 - \frac{4\alpha^3}{9} = 1 - \frac{4\alpha^3}{27}$$

больше нуля, то $g(x)$ корней не имеет. Это будет при

$$\frac{4\alpha^3}{27} < 1 \text{ или } \alpha < \frac{3}{\sqrt[3]{4}} =: \alpha_*. \tag{6}$$

При выполнении условия (6) функция $\varphi(x)$ имеет единственную точку минимума $x = 1$, т. е. $\varphi(x) > \varphi(1)$ при $x \neq 1$, а тогда

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 + (z - \alpha)^2 \geq 3(1 - \alpha)^2 \tag{7}$$

при всех x, y, $z > 0$, $xyz = 1$. Предельным переходом при $\alpha \longrightarrow \alpha_*$ получим, что неравенство (7) выполняется при $\alpha = \alpha_*$. Теорема доказана. □

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *В частности, неравенство (5) выполняется при $\alpha \leq 0$, т. е. при $b \geq 0$. В этом случае неравенство (5) следует из неравенств $Q \geq A \geq G$, где $G = \sqrt[3]{xyz}$ — среднее геометрическое чисел x, y, z. Теорема 2 дает более широкую область $\alpha \leq 3/\sqrt[3]{4} = \alpha_*$ выполнения неравенства (5).*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *При $\alpha > \alpha_*$ неравенство (5) может нарушаться. Приведем простейший пример: $f(x) = (x - 4)^2$, $x = y = \frac{1}{2}$, $z = 4$. Тогда*

$$f(x) + f(y) + f(z) = \frac{49}{4} + \frac{49}{4} + 0 < 3f(1) = 27.$$

Можно доказать более общее утверждение о нарушении неравенства (5).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f(x) = (x - \alpha)^2$. Если $\alpha > 2$, то найдутся x, y, $z > 0$, $xyz = 1$, такие, что*

$$f(x) + f(y) + f(z) < 3f(1).$$

Доказательство. Достаточно найти значения x, для которых функция $\varphi(x) = f(x) + f(x) + f(1/x^2)$ удовлетворяет неравенству $\varphi(x) < \varphi(1)$. При доказательстве теоремы 2 получено равенство $x^5\varphi'(x) = (x^3 - 1)g(x)$, где $g(x) = x^3 - \alpha x^2 + 1$. Имеем $g(0) = 1$, $g(1) = 2 - \alpha < 0$. Поэтому уравнение $g(x) = 0$ имеет два корня x_1 и x_2, $0 < x_1 < 1 < x_2$. Производная $\varphi'(x)$ меняет знак в точках x_1, 1, x_2. А именно $\varphi' < 0$ на $(0, x_1)$, $\varphi' > 0$ на $(x_1, 1)$, $\varphi' < 0$ на $(0, x_2)$, $\varphi' > 0$ на (x_2, ∞).

Отсюда x_1 и x_2 — точки минимума $\varphi(x)$, а $x = 1$ — точка максимума. Получаем $\varphi(x) < \varphi(1)$ при $x \in [x_1, x_2]$, $x \neq 1$. Теорема доказана. □

На рис. 1 представлен график функции $\varphi(x)$ при $\alpha = 1.95$. Видно, что график заходит ниже горизонтальной прямой $y = \varphi(1)$. Значит, неравенство (5) нарушается.

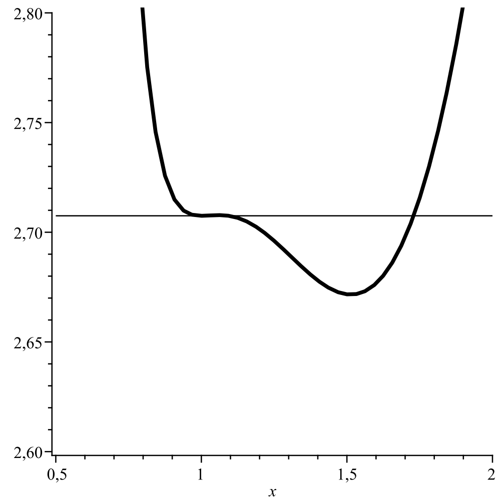

Рис. 1. График функции $\varphi(x)$ при $\alpha = 1.95$

Гипотеза. *Неравенство (5) нарушается для всех α из промежуточной области $\alpha_* < \alpha \leq 2$.*

4. Неравенства при ограничении $xy = 1$

Пусть по-прежнему $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Найдем, когда выполняется неравенство

$$f(x) + f(y) \geq 2f(1) \tag{8}$$

при всех x, $y > 0$, таких, что $xy = 1$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a^2}.$$

Положив $\alpha := -b/2a$, имеем $f_0(x) = a(x-\alpha)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}$. Если для $f_0(x) = (x-\alpha)^2$ выполнено неравенство $f_0(x) + f_0(y) \geq 2f_0(1)$, то будет выполняться неравенство (8).

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Если* $\alpha \leq 2$, *то справедливо неравенство* $f(x) + f(y) \geq 2f(1)$ *для любых* x, $y > 0$, *таких, что* $xy = 1$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Список литературы

1. **Dannan F.M., Sitnik S.M.** The Damascus inequality // *Probl. Anal. Issues Anal. Vol 5 (23). No. 2. 2016. Pp. 3-19.*

Summary

Pevnyi A. B., Yurkina M. N. Inequalities for the sum of three quadratic trinomials

For $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ the autors prove inequality $f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f(1)$, where numbers x, y, z are positive and satisfy the conditions $x + y + z = 1$ or $xyz = 1$.

Keywords: quadratic trinomial, optimization problem, minimum, inequality

References

1. **Dannan F.M., Sitnik S.M.** The Damascus inequality, *Probl. Anal. Issues Anal*, vol. 5 (23), №2, 2016, pp. 3–19.

СГУ им. Питирима Сорокина *Поступила 12.12.2016*

Для цитирования: Певный А. Б., Юркина М. Н. Неравенства для суммы трех квадратных трехчленов // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1 (22). С. 79–84.*

For citation: Pevnyi A. B., Yurkina M. N. Inequalities for the sum of three quadratic trinomials, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics,* 2017, №1 (22), pp. 79–84.