НАСТАВНИК-УЧЕНИК

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (22). 2017

УДК 517.2

ТЕОРЕМА ПОМПЕЙЮ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

С. И. Калинин, А. В. Дозморов

В работе рассматриваются два обобщения теоремы Помпейю о среднем значении.

Ключевые слова: теорема Помпейю, теорема Лагранжа, дифференцируемая функция.

В статье [1] воспроизводится следующая теорема о среднем значении для дифференцируемой на отрезке функции, именуемая теоремой Помпейю.

Теорема 1. (D. Pompeiu) *Пусть f — дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ числовой прямой функция, при этом $0 \notin [a;b]$. Тогда для любых двух различных точек x_1, x_2 из $[a;b]$ найдется лежащая между ними точка ξ, такая, что*

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{1}$$

В цитируемой статье приводится доказательство данной теоремы (см. п. 2 статьи) и отмечается, что она впервые была установлена в работе [2].

Схемой упоминаемого доказательства мы воспользуемся ниже при доказательстве нашей теоремы 3, обобщающей теорему Помпейю, а пока скажем, что его анализ допускает возможность формулирования теоремы 1 в более слабых предположениях относительно функции f — достаточно считать, что функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема внутри его.

С учетом отмеченного переформулируем теорему 1 в форме, присущей классической теореме Лагранжа.

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, не содержащем точки $x = 0$, и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда найдется точка $\xi, \xi \in (a; b)$, такая, что*

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{2}$$

Теорему 2 условимся называть так же, как и теорему 1, — теоремой Помпейю. Очевидно, теорема 2 влечет теорему 1.

Опираясь на [1], приведем геометрическую интерпретацию теоремы 2. Нетрудно проверить, что значение $\dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b}$ есть ордината точки M пересечения прямой, соединяющей концы A и B графика функции f на отрезке $[a; b]$, с осью ординат. Аналогично значение $f(\xi) - \xi f'(\xi)$ есть ордината точки пересечения с данной осью касательной к этому графику в точке $M_0(\xi; f(\xi))$. Таким образом, описанные прямая и касательная пересекают ось ординат в одной точке M.

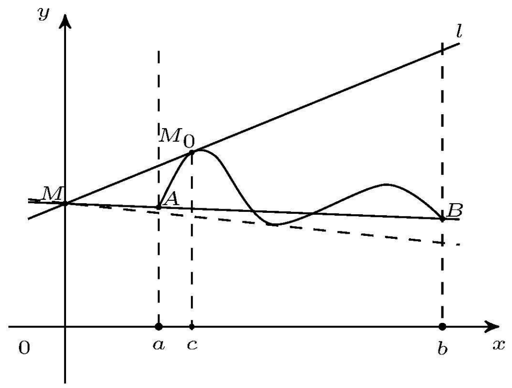

Рис. 1. Геометрическая интерпретация теоремы Помпейю

Установим теорему типа теоремы 2, формулируемую в терминах односторонних производных и обобщающую теорему 2.

Теорема 3. *Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ $(0 \notin [a; b])$ числовой прямой и в каждой точке x интервала $(a; b)$ обладает конечными односторонними производными $f'_-(x), f'_+(x)$. Тогда найдется точка $\xi, \xi \in (a; b)$, такая, что разностное отношение $\dfrac{af(b) - bf(a)}{a - b}$ будет содержаться в отрезке с концами в точках $f(\xi) - \xi f'_-(\xi), f(\xi) - \xi f'_+(\xi)$.*

Замечание 1. Легко видеть, что теорема Помпейю (в нашей редакции) есть следствие сформулированной теоремы 3.

Замечание 2. Учитывая геометрическую интерпретацию теоремы Помпейю, приведенную выше, аналогично можно интерпретировать теорему 3: точка пересечения прямой, соединяющей концы графика функции f на отрезке $[a; b]$, с осью ординат принадлежит отрезку на этой оси, вырезаемому односторонними касательными к графику рассматриваемой функции в точке $(\xi; f(\xi))$. В случае дифференцируемости функции f в точке ξ упоминаемый отрезок, очевидно, вырождится в точку.

Приведем иллюстрацию сформулированной теоремы на конкретном примере. Рассмотрим функцию $f(x) = |x-1|, x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Для нее разностное отношение $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$ принимает значение $\frac{1}{3}$, а роль точки ξ выполняет точка 1, при этом величины $f(\xi)-\xi f'_-(\xi), f(\xi)-\xi f'_+(\xi)$ равны соответственно 1 и –1. Таким образом, имеем включение $\frac{1}{3} \in [-1; 1]$ (см. рис. 2).

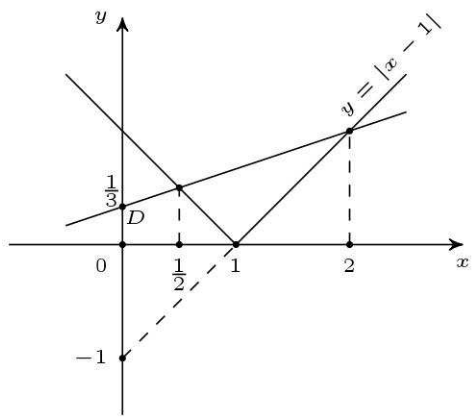

Рис. 2. Иллюстрация теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующее обобщение теоремы Лагранжа.

Теорема (B. Finta, [3]). *Если непрерывная функция* $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ *в каждой точке* x *интервала* $(a; b)$ *обладает конечными односторонними производными* $f'_-(x), f'_+(x)$, *то найдется хотя бы одна точка* $\xi, \xi \in (a; b)$, *такая, что отрезок с концами в точках* $f'_-(\xi), f'_+(\xi)$ *будет содержать в себе значение* $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

Докажем сейчас теорему 3. Введем в рассмотрение функцию $F(t) = tf\left(\frac{1}{t}\right)$. Она является непрерывной на отрезке $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ и для каждого t из интервала $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$ обладает односторонними производными $F'_-(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}f'_-\left(\frac{1}{t}\right), F'_+(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}f'_+\left(\frac{1}{t}\right)$. В силу теоремы Finta можем заключить: найдется точка $\eta, \eta \in \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$, такая, что значение $\dfrac{F\left(\frac{1}{a}\right) - F\left(\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ будет содержаться в отрезке с концами в точках $F'_-(\eta)$, $F'_+(\eta)$. Но имеют место соотношения:

$$\frac{F\left(\frac{1}{a}\right) - F\left(\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{1}{a}f(a) - \frac{1}{b}f(b)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = \frac{af(b) - bf(a)}{a-b},$$
$$F'_-(\eta) = f\left(\frac{1}{\eta}\right) - \frac{1}{\eta}f'_-\left(\frac{1}{\eta}\right), F'_+(\eta) = f\left(\frac{1}{\eta}\right) - \frac{1}{\eta}f'_+\left(\frac{1}{\eta}\right).$$

Полагая $\frac{1}{\eta} = \xi$, из данных соотношений получаем требуемое. Теорема доказана.

Установим еще одну теорему, обобщающую теорему Помпейю. Но прежде докажем вспомогательную лемму, нужную нам для доказательства упоминаемой теоремы.

Лемма. *Пусть* $\varphi\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ — *функция, удовлетворяющая всем условиям классической теоремы Ролля о среднем значении, т. е.*

1) φ *непрерывна на рассматриваемом отрезке;*

2) дифференцируема внутри его;

3) $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Тогда на интервале $(a;b)$ *найдется хотя бы одна точка* ξ*, такая, что*

$$\varphi(a) = \varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi). \tag{3}$$

Доказательство. Если $\varphi(x) = const$, то соотношение (3) выполняется с очевидностью.

Предположим, что условие $\varphi(x) = const$ не выполняется. Введем в рассмотрение прямоугольник П, ограниченный вертикальными прямыми $x = a, x = b$ и горизонтальными прямыми $y = m, y = M$, где $m = \inf\limits_{[a;b]} \varphi, M = \sup\limits_{[a;b]} \varphi$ (см. рис. 3). В силу условия 1) значения m и M функцией φ в некоторых точках отрезка $[a;b]$ принимаются. Очевидно, график Γ_φ функции φ будет принадлежать П.

Пусть α — угол, под которым прямоугольник П виден из точки $K(0;\varphi(a))$. Отметим, что раствор данного угла меньше π. Обозначим через β угол, под которым из точки K виден график Γ_φ. Очевидно, $\beta \subset \alpha$, а сторонами данного угла являются невертикальные лучи, исходящие из точки K и опорные к кривой Γ_φ. Заметим также, что хотя бы один из таких лучей не будет содержать хорду, стягивающую концы Γ_φ, поскольку в силу условия 3) одно из значений m и M достигается во внутренней точке отрезка $[a;b]$. Этот луч обозначим l.

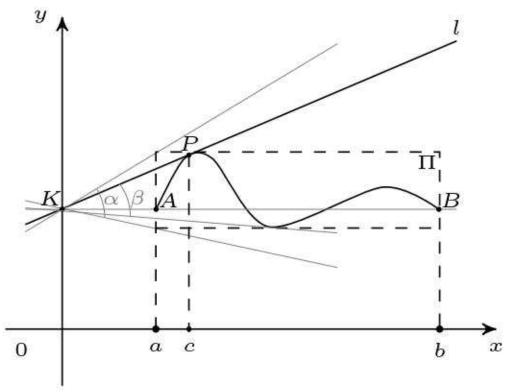

Рис. 3. К доказательству леммы

В силу условия 2) леммы Γ_φ — гладкая кривая, следовательно, продолжение l является касательной к кривой Γ_φ в некоторой его точке $P(c;\varphi(c)), c \in (a;b)$. Запишем уравнение данной касательной:

$$y = \varphi(c) + \varphi'(c)(x - c).$$

Полагая в нем $x = 0$, найдем значение ординаты y_{M_0} точки M_0:

$$y_{M_0} = \varphi(c) + \varphi'(c)(-c).$$

С другой стороны, $y_{M_0} = \varphi(a)$, потому можно заключить, что искомой точкой ξ является точка c. Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть функции f и g определены и непрерывны на отрезке $[a;b](0 \notin [a;b])$ числовой прямой и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0, x \in (a;b)$. Тогда найдется точка $\xi, \xi \in (a;b)$, такая, что

$$\frac{g(a)f(b)-g(b)f(a)}{g(a)-g(b)}=$$
$$=f(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(\xi)-\xi\left(f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)\right). \qquad (4)$$

Доказательство. Отметим, во-первых, что в силу теоремы Ролля и условия $g'(x)\neq 0, x\in(a;b)$, дроби, участвующие в записи соотношения (4), имеют смысл. Это говорит о корректности записи (4).

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x).$$

Нетрудно проверить, что она удовлетворяет всем условиям установленной леммы, следовательно, для нее будет выполняться соотношение вида (3):

$$F(a)=F(\xi)-\xi F'(\xi), \xi\in(a;b),$$

или

$$f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(a)=$$
$$=f(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(\xi)-\xi\left(f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)\right), \xi\in(a;b).$$

Отсюда имеем соотношение (4). Теорема доказана.

Замечание 3. Если в условиях теоремы 4 положить $g(x)=x$, то мы имеем утверждение теоремы 2. Таким образом, теорема 4 обобщает теорему Помпейю. По отношению к последней она играет такую же роль, как теорема Коши по отношению к теореме Лагранжа.

Список литературы

1. **Dragomir S. S.** An inequality of Ostrowski type via Pompeiu's mean value theorem // http://www.emis.de/journals/JIPAM/index-4.html: Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. 6(3) Art. 83, 2005. URL: http://www.emis.de/journals/JIPAM/article556.html?sid=556 (date of the application: 09.03.2017).

2. **Pompeiu D.** Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis, Mathematica, Cluj, Romania, 22, 1946, p. 143–146.

3. **Finta B.** A generalization of the Lagrange mean value theorem, Octogon, 4, № 2, 1996, p. 38–40.

ВятГУ *Поступила 09.03.2017*

Summary

The two generalizations of the Pompeiu theorem for mean are considered.
Keywords: Pompeiu's theorem, Lagrange's theorem, differentiable function.

References

1. **Dragomir S. S.** An inequality of Ostrowski type via Pompeiu's mean value theorem // http://www.emis.de/journals/JIPAM/index-4.html: *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics.* 6(3) Art. 83, 2005. URL: http://www.emis.de/journals/JIPAM/article556.html?sid=556 (date of the application: 09.03.2017).

2. **Pompeiu D.** *Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis. Mathematica.* Cluj, Romania, 22, 1946, pp. 143–146.

3. **Finta B.** *A generalization of the Lagrange mean value theorem.* Octogon. 4. № 2, 1996, pp. 38–40.

Для цитирования: Калинин С. И., Дозморов А. В. Теорема Помпейю и ее обобщения // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1 (22). С. 72–78.*

For citation: Kalinin S. I., Dozmorov A. V. Pompeiu theorem and its generalizations, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics,* 2017, №1 (22), pp. 72–78.