МАТЕМАТИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 1 (21). 2016

УДК 511.0

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА: СКРЫТЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Р. Р. Пименов

В статье обнаруживается семимерное обобщение теоремы Дезарга, в котором прямые рассматриваются как точки, а трехмерные пространства как прямые. Это служит примером концепции скрытых пространств. Результат обобщается на пространства произвольной размерности. Работа продолжает исследования, начатые в статье «Обобщение теоремы Дезарга: геометрия перпендикулярного».

Ключевые слова: теорема Дезарга, основания геометрии, многомерные пространства, геометрия прямых, стереометрия.

1. Введение

В статье [4] было показано, что есть аналогия между геометрией прямых в $\mathbb{R}^3$ и планиметрией в связи с тем, что две непараллельные прямые в пространстве однозначно задают третью прямую — прямую, перпендикулярную им обеим. С другой стороны эту тему освещает статья С. Табачникова [2][1]. Данная статья приводит другой, еще более явный пример, когда подпространства большой размерности можно рассматривать как подпространства меньшей размерности. Обнаруживается, что пятимерное пространство можно рассматривать как плоскость, «точки» которой – обычные прямые, а «прямыми» являются трехмерные подпространства. Семимерное пространство мы будем рассматривать как трехмерное, добавив к названным «скрытым» пространствам еще пятимерное: его можно рассматривать как плоскость.

[1]Эта содержательнейшая статья была неизвестна мне во время написания [4]. В ней доказываются высказанные в [4] стереометрические гипотезы, показано как сопоставить теоремам проективной геометрии плоскости теоремы о перпендикулярных прямых в $\mathbb{R}^3$ и рассматриваются случаи неевклидовых геометрий. Планиметрическая реализация обобщенной теоремы Дезарга, проведенная в [4], в ней не рассматривается.

Работа [4] базировалась на перпендикулярности, в настоящей статье о перпендикулярности мы вспомним только в заключении, в разделе 5. До этого места нам будет достаточно отношения инцидентности или принадлежности одного подпространства другому. Теорема Дезарга выступает в статье примером, поясняющим эту концепцию. Мы говорим о семимерном обобщении для краткости, в статье результат расширяется для пространств произвольной размерности.

2. Семимерная теорема Дезарга

Напомним классическую формулировку теоремы Дезарга: *даны два* ***треугольника*** *с вершинами A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2, при этом треугольники находятся в проективном соответствии, т. е. прямые, проведенные через соответственные пары их вершин, конкурентны: A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения продолжений соответственных сторон указанных треугольников лежат на одной прямой: $A_1B_1 \bigcap A_2B_2$, $B_1C_1 \bigcap B_2C_2$, $A_1C_1 \bigcap A_2C_2$ коллинеарны. Верно и обратное – если три точки пересечения продолжений сторон треугольников коллинеарны, то прямые, проходящие через их соответственные вершины, конкурентны (пересекаются в одной точке).*

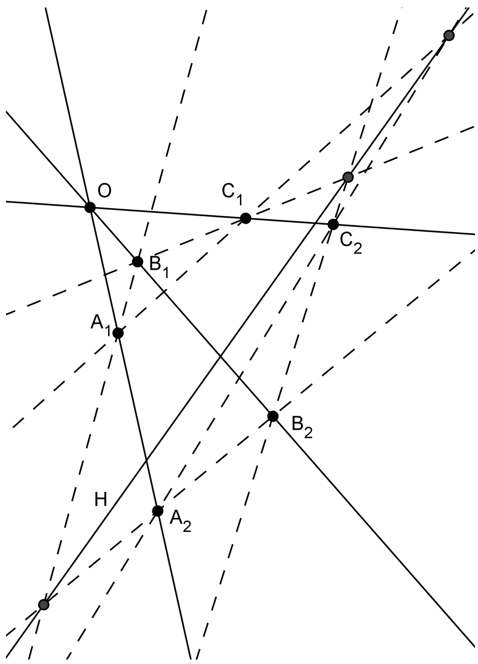

Рис. 1. Теорема Дезарга

Теорема Дезарга, как известно, верна и на плоскости, и в трехмерном пространстве; более того, ее доказательство для случая, когда A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 расположены в пространстве, существенно проще, чем для плоского случая. Обобщая эту теорему, будем основываться именно на объемном расположении ее элементов. Наша идея – разместить в пространстве не точки, а прямые так, чтобы их расположение составило бы конфигурацию точек в теореме Дезарга. Что означает «три точки A, B, C лежат на одной прямой»? То, что точка лежит на той же прямой, на которой лежат точки A и B. Если мы хотим аналогично разместить прямые A, B, C в пространстве, то третья прямая должна лежать в том же подпространстве, что и первые две. Две прямые в общем случае образуют трехмерное пространство. Поэтому в $\mathbb{R}^3$ такое требование бессодержательно: любые три прямые обладают таким свойством. Уже в $\mathbb{R}^4$ это требование имеет смысл: оно означает, что третья прямая лежит в том же трехмерном подпространстве, что и первые две. Введем обозначение.

Определение 2.1. *Пусть A и B прямые, $A \times B$ означает пространство наименьшей возможной размерности, в котором лежат эти две прямые. Мы будем говорить также, что A и B порождают, или создают, или задают такое подпространство.*

Замечание 2.1. *Возможно, что прямые A и B лежат в одной плоскости (пересекаются или параллельны), иными словами, $A \times B$ – плоскость. Это частный случай расположения прямых. Во всех следующих формулировках этот случай мы исключаем из рассмотрения, предполагая, что все рассматриваемые пары прямых — общего положения и определяют трехмерное пространство.*

Теперь мы можем сформулировать гипотезу, она окажется неудачной.

Гипотеза: о четырехмерном обобщении теоремы Дезарга. *В $\mathbb{R}^4$ даны две тройки* ***прямых****: A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2, при этом все трехмерные пространства, образованные одноименными парами прямых $A_1 \times A_2$, $B_1 \times B_2$, $C_1 \times C_2$ пересекаются по одной прямой. Тогда три прямые $(A_1 \times B_1) \bigcap (A_2 \times B_2)$, $(B_1 \times C_1) \bigcap (B_2 \times C_2)$, $(A_1 \times C_1) \bigcap (A_2 \times C_2)$ лежат в одном трехмерном пространстве. Верно и обратное: если три указанные в заключении теоремы прямые лежат в одном трехмерном пространстве, то три трехмерных пространства, указанные в условии теоремы, имеют общую прямую.*

Неудачна эта гипотеза потому, что пересечение двух трехмерных пространств в $\mathbb{R}^4$ не прямая, а плоскость (как было сказано, случаи параллельности мы не рассматриваем). Тем самым построенные в теореме пересечения $(A_1 \times B_1)\bigcap(A_2 \times B_2)$, $(B_1 \times C_1)\bigcap(B_2 \times C_2)$, $(A_1 \times C_1)\bigcap(A_2 \times C_2)$ – плоскости, а не прямые. Чтобы обобщить теорему Дезарга, нам надо перенести всю конструкцию в такое пространство, где пересечение двух трехмерных пространств даст одномерное. Это происходит в пятимерном пространстве.

Сформулируем новую теорему, она отличается от предыдущей гипотезы лишь размерностью объемлющего пространства.

Теорема 2.1. ***Пятимерное обобщение теоремы Дезарга.*** *В $\mathbb{R}^5$ даны две тройки* ***прямых****: A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2, при этом трехмерные пространства, образованные одноименными парами прямых $A_1 \times A_2$, $B_1 \times B_2$, $C_1 \times C_2$ пересекаются по одной прямой. Тогда три прямые $(A_1 \times B_1)\bigcap(A_2 \times B_2)$, $(B_1 \times C_1)\bigcap(B_2 \times C_2)$, $(A_1 \times C_1)\bigcap(A_2 \times C_2)$ лежат в одном трехмерном пространстве. Верно и обратное: если три указанные в заключении теоремы прямые лежат в одном трехмерном пространстве, то три трехмерных пространства, указанные в условии теоремы, имеют общую прямую.*

Доказательство приведено ниже в замечании о новом трехстороннике.

Замечание 2.2. ***О новом трехстороннике.*** *В работе [4] был определен трехсторонник из прямых в $\mathbb{R}^3$. Можно трактовать это обобщение теоремы Дезарга тоже как теорему о трехстороннике из прямых, но в многомерном пространстве. В отличие от [4] здесь трехсторонник определяется без использования перпендикулярности: стороной, как и в случае плоского треугольника, можно назвать подпространство, порожденное двумя его вершинами. Рассматривать такой трехсторонник из прямых в $\mathbb{R}^3$ бессодержательно – всякая его сторона совпадет со всем пространством. Но, как было указано в [4], для теоремы Дезарга (классической или обобщенной) не требуется ни понятие треугольника, ни трехсторонника, достаточно говорить о трех парах элементов (точках, прямых или, как будет показано в следующей части, подпространствах произвольной размерности).*

Обратим внимание на то, что в пятимерном пространстве трехмерные подпространства в общем случае пересекаются по прямой, а пара прямых общего положения определяет трехмерное пространство. Именно этот факт демонстрирует нам концепцию «скрытых пространств». Проведем аналогию с обычной плоскостью.

Определение 2.2. *Назовем прямую в $\mathbb{R}^5$ точкой (мы подчеркнули, чтобы надежно отличить эту точку от обычной точки), а трехмерные подпространства в $\mathbb{R}^5$ – прямыми.*

Зафиксируем сказанное ранее в новой терминологии.

Предложение 2.1. *В $\mathbb{R}^5$ через две точки общего положения проходит одна и только одна прямая, две прямые пересекаются по одной точке.*

В этой терминологии пятимерное пространство, рассматриваемое с одномерными и трехмерными подпространствами, превращается в проективную плоскость. Именно такую плоскость мы и называем «скрытым» пространством, а одномерные и трехмерные подпространства – скрытые в $\mathbb{R}^5$ «точки» и «прямые». Как известно, доказательство теоремы Дезарга в $\mathbb{R}^2$ нетривиально, и наиболее простой путь — рассмотреть теорему в $\mathbb{R}^3$. С пятимерной обобщенной теоремой мы поступим точно так же, к введенным ранее точкам и прямым надо определить плоскость. В $\mathbb{R}^5$ это не получится.

Плоскость определяется тремя точками общего положения. Две прямые определяют трехмерное пространство, три прямые в общем случае определяют пятимерное пространство. Поэтому плоскостью естественно считать $\mathbb{R}^5$. Осталось подобрать размерность объемлющего пространства. Трехмерное пространство определяется четырьмя точками общего положения, поэтому объемлющим пространством для рассматриваемой конструкции будет пространство, определенное четырьмя прямыми общего положения. Это – *семимерное пространство.*

Определение 2.3. *Назовем в $\mathbb{R}^7$ прямую точкой, трехмерные подпространства – прямыми, а пятимерные подпространства – плоскостями.*

К определению 2.2 добавлено лишь определение плоскости.

В семимерном пространстве скрывается трехмерное. Доказательство:

1. Две точки общего положения однозначно определяют прямую.
2. Три точки общего положения однозначно определяют плоскость.
3. Две плоскости общего положения пересекаются по одной прямой.
4. Три плоскости общего положения пересекаются в одной точке.
5. Плоскость и прямая общего положения пересекаются в точке.

О первых двух пунктах уже говорилось. Проверим последние три. Два пятимерных подпространства пересекаются в $\mathbb{R}^7$ по трехмерному пространству, это проверяет пункт 3. Трехмерное подпространство пересекается с пятимерным в $\mathbb{R}^7$ по одномерному, отсюда следуют пункты

4 и 5. Общие формулы для подобных вычислений размерности указаны в следующем разделе. Все рассматриваемые подпространства считаются находящимися в общем положении.

□

Теорема 2.2. ***Семимерное обобщение теоремы Дезарга.*** *В $\mathbb{R}^7$ даны две тройки прямых: A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2, при этом все трехмерные пространства, образованные одноименными парами прямых $A_1 \times A_2$, $B_1 \times B_2$, $C_1 \times C_2$, пересекаются по одной прямой. Тогда три прямые $(A_1 \times B_1) \bigcap (A_2 \times B_2)$, $(B_1 \times C_1) \bigcap (B_2 \times C_2)$, $(A_1 \times C_1) \bigcap (A_2 \times C_2)$ лежат в одном трехмерном пространстве. Верно и обратное: если три указанные в заключении теоремы прямые лежат в одном трехмерном пространстве, то три трехмерных пространства, указанные в условии теоремы, имеют общую прямую.*

Доказательство. Метод полностью переносится из доказательства объемной теоремы Дезарга. Ради этого и давались определения выше. Рассмотрим пятимерное пространство (плоскость), проходящее через прямые A_1, A_2, A_3 (обозначим его W-плоскость) и пятимерное пространство, проходящее через B_1, B_2, B_3 (обозначим его V-плоскость). Все пересечения (точки) $(A_1 \times B_1) \bigcap (A_2 \times B_2)$, $(B_1 \times C_1) \bigcap (B_2 \times C_2)$, $(A_1 \times C_1) \bigcap (A_2 \times C_2)$ лежат также в пересечении $W \bigcap V$, которое есть трехмерное пространство (прямая). □

Замечание 2.3. ***О пространствах меньшей размерности.*** *Сформулированное ранее предложение о пятимерном пространстве можно теперь доказать аналогично тому, как плоская теорема Дезарга доказывается с помощью объемной теоремы Дезарга, рассматривая, например, предельный переход, в результате которого все элементы теоремы стремятся к точкам, расположенным в пространстве меньшей размерности. О четырехмерном случае мы пока можем сформулировать лишь гипотезу: если $A_1 \times A_2$, $B_1 \times B_2$, $C_1 \times C_2$ – не общего положения, то и $(A_1 \times B_1) \bigcap (A_2 \times B_2)$, $(B_1 \times C_1) \bigcap (B_2 \times C_2)$, $(A_1 \times C_1) \bigcap (A_2 \times C_2)$ – не общего положения.*

3. Пространства произвольного числа измерений

Ранее стартовым элементом для построения обобщения была прямая, и вся конструкция обновленной теоремы Дезарга размещалась в $\mathbb{R}^7$. Но мы можем начать построение не с точек (классическая теорема Дезарга), не с прямых (доказанная в статье теорема), а с подпространства произвольной размерности. Введем необходимые обозначения.

Определение 3.1. *Следуя принятым в литературе обозначениям, обозначим размерность пространства* $\dim$. *Пусть* A *— произвольное евклидово пространство:* $\dim A$ *означает размерность* A.

Определение 3.2. *Пусть* A *и* B *— два евклидовых пространства. Обозначим через* $A \times B$ *евклидово пространство наименьшей возможной размерности, включающее в себя* A *и* B. *Единственность и существование такого пространства общеизвестна.*

Хотя понятие «общего положения подпространств» давно известно в линейной алгебре, здесь мы дадим и его определение. Как известно, мы говорим, что k *точек* $A_1, A_2, \dots, A_k$ находятся в *общем положении*, если размерность заданного ими подпространства (в нашей терминологии – $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$) наибольшая из возможных. Как известно, размерность такого подпространства равна $k-1$. Аналогично определим и пару подпространств общего положения.

Определение 3.3. *Пусть подпространство* A *задается* n *точками* A_i *общего положения, а подпространство* B *–* m *точками* B_j *общего положения. Если совокупность всех точек* A_i *и* B_j *— также точки общего положения, то мы говорим, что пространства* A *и* B *находятся в общем положении. Обратим внимание, что мы говорим не «объединение множеств точек», а «совокупность», и это не случайно: какие-то точки из* A_i *могут совпасть с точками из* B_j. *При объединении множеств эти совпадающие точки дадут не несколько точек, а одну, получившееся множество точек может оказаться общего положения. А говоря про совокупность точек, мы имеем в виду, что совпадающие точки входят в нее дважды, а множество точек, где есть совпадающие элементы, – заведомо не общего положения. Легко видеть, что наше определение не зависит от выбора исходных* A_i *и* B_j, *определяющих* A *и* B *соответственно. Заметим сразу, что в этом случае* $A \times B$ *определяется* $n+m$ *точками.*

Замечание 3.1. *Если подпространства* A *и* B *общего положения, то* $\dim(A \times B) = \dim A + \dim B + 1$. *Это очевидно, например, из того, что пространство размерности* k *задается* $k+1$ *точкой.*

Ранее мы рассматривали подпространства, считая их вложенными в какое-то евклидово пространство большого числа измерений. Теперь будем мыслить все наши пространства вложенными в евклидово пространство W, и $\dim W$ может быть и не велико. В этом случае два подпространства A и B могут никогда не находиться в общем положении. Две прямые на плоскости никогда не находятся в общем положении, так как две прямые в общем случае определяют трехмерное пространство. Аналогично, две плоскости в $\mathbb{R}^3$ или плоскость и прямая в $\mathbb{R}^3$ не могут находиться в общем положении хотя бы потому, что всегда пересекаются. Заметим, хотя плоскость и прямая в $\mathbb{R}^3$ никогда не находятся в общем положении в смысле данного выше определения, но все-таки есть градация «необщности» их положения: ясно, что пересекающиеся плоскость и прямая находятся в более общем положении, чем в случае, когда прямая принадлежит плоскости. В четырехмерном пространстве можно привести больше примеров этого.

Предложение 3.1. ***Формула размерности пересечения.*** *Пусть подпространства A и B лежат в пространстве W. Тогда*

$$\dim(A \bigcap B) = \dim A + \dim B - \dim W,$$

A и B предполагаются общего положения (насколько это возможно внутри пространства W). Проанализируем формулу: если размерность W больше суммы размерностей A и B, то A и B в общем случае не пересекаются в W, например $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^1$ не пересекаются в $\mathbb{R}^3$. Если размерность объемлющего пространства равна сумме размерностей подпространств, то подпространства пересекаются по подпространству нулевой размерности – точке. Если размерность объемлющего пространства меньше суммы размерностей подпространств, то их пересечение – подпространство ненулевой размерности. В двух последних случаях A и B не общего положения, но все-таки они настолько общо расположены, насколько это возможно в W. Размерность пересечения A и B можно считать мерой «необщности» A и B, чем эта размерность ниже, тем более общее положение занимают A и B.

Теперь можно осуществить построение Дезарга так, чтобы его элементом была не точка и не прямая, а пространство размерности К. Два таких пространства общего положения порождают пространство размерности 2К+1, три таких пространства порождают пространство размерности 3К+2.

Определение 3.4. *Назовем пространство размерности К <u>точкой</u>, пространство размерности 2К+1 – <u>прямой</u>, пространство размерности 3К+2 – <u>плоскостью</u>.*

Из определения следует, что <u>точки</u> общего положения, находящиеся на <u>плоскости</u>, определяют <u>прямую</u>. Убедимся, что две <u>прямые</u> на плоскости пересекаются в <u>точке</u>: (2К+1)+(2К+1)−(3К+2)=К, размерность пересечения равна К, что и требовалось. Таким образом, пространство размерности 3K+2 можно рассматривать как скрытую плоскость с точками и прямыми указанных размерностей. Теперь рассмотрим пространство, созданное четырьмя пространствами размерности K, его размерность – 4K+3, и покажем, что оно является скрытым трехмерным пространством. Как и в семимерном случае, требуется проверить.

1. Две точки общего положения однозначно определяют прямую.
2. Три точки общего положения однозначно определяют плоскость.
3. Две плоскости общего положения пересекаются по одной прямой.
4. Три плоскости общего положения пересекаются в одной точке.
5. Плоскость и прямая общего положения пересекаются в точке.

Первые два пункта мы обеспечили ранее, подбирая размерности 2K+1 и 3K+2. Проверим третий пункт (3K+2)+(3K+2)−(4K+3)=2K+1, что и требовалось. Проверим пункт 5: (3K+2)+(2K+1)−(4K+3)=K, что и требовалось. Четвертый пункт следует из пятого.

Теперь мы можем сформулировать (4K+3)-мерную теорему Дезарга.

Теорема 3.1. ***Многомерное обобщение теоремы Дезарга.*** *В $\mathbb{R}^{4K+3}$ даны две тройки подпространств размерности K: A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2, при этом все (2K+1)-мерные подпространства, образованные одноименными парами подпространств $A_1 \times A_2$, $B_1 \times B_2$, $C_1 \times C_2$, пересекаются по одному подпространству размерности K. Тогда три K-мерных подпространства $(A_1 \times B_1)\bigcap(A_2 \times B_2)$, $(B_1 \times C_1)\bigcap(B_2 \times C_2)$, $(A_1 \times C_1)\bigcap(A_2 \times C_2)$ лежат в одном подпространстве размерности 2K+1. Верно и обратное: если три указанные в заключении теоремы подпространства лежат в одном 2K+1 пространстве, то три (2K+1)-мерных пространства, указанные в условии теоремы, имеют общее подпространство размерности K.*

Доказательство. Доказательство в точности повторяет доказательство для рассмотренного ранее семимерного случая: подпространства $A_1 \times B_1 \times C_1$ и $A_2 \times B_2 \times C_2$ являются плоскостями и пересекаются в общем случае по прямой, на которой и лежат указанные в заключении теоремы пересечения подпространства. Как и в случае трехмерной теоремы Дезарга, существеннейшим является существование пересечений прямых $(A_1 \times B_1)\bigcap(A_2 \times B_2)$, $(B_1 \times C_1)\bigcap(B_2 \times C_2)$, $(A_1 \times C_1)\bigcap(A_2 \times C_2)$, из которого и следует требуемое. А существование рассматриваемых пересечений следует из того, что все четыре образующих какое-то из трех пересечений элемента (например A_1, B_1 и A_2, B_2) сами лежат в одной плоскости. Это следует из того, что пересечение $A_1 \times A_2$ и $B_1 \times B_2$ есть точка. Прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются в точке, как было показано ранее. □

4. Заключение: вопросы и развитие темы

Первое, что можно сделать: проверить те исключения, которые мы указали в замечании 2.1. Мы не рассматривали пары прямых, лежащих в одной плоскости. Рассмотрение прямых необщего положения в $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \mathbb{R}^7$ может обогатить многомерную теорему Дезарга. Интересные ситуации могут возникать и в общем случае, при рассмотрении не прямой, а произвольного пространства $\mathbb{R}^k$: два k-мерных подпространства могут пересекаться по подпространствам различных размерностей, и возникающие варианты должны найти отражение в обобщенной теореме Дезарга.

Интересно искать многомерные аналоги других теорем проективной геометрии. Здесь возникает много вопросов: например теорему Паппа невозможно прямо перенести в трехмерное пространство. Конфигурация точек и прямых теоремы Паппа возможна только на плоскости. Но можно попробовать заменить элементы теоремы Паппа, сохраняя те отношения принадлежности, которые она дает. Например, рассматривать как элементы теоремы не точки и прямые, а прямые и плоскости.

Поэтому теорема Дезарга – наилучший пробный камень для многомерных обобщений. Выскажем следующую, наиболее общую гипотезу, когда все шесть первых ее элементов — подпространства произвольной размерности, и вся конструкция расположена в пространстве произвольной размерности.

Теорема 4.1. ***Гипотеза о многомерном обобщении теоремы Дезарга.*** *В $\mathbb{R}^k$ даны две тройки подпространств произвольных, возможно, различных размерностей K: A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2, при этом подпространства, образованные одноименными парами подпространств $A_1 \times A_2$, $B_1 \times B_2$, $C_1 \times C_2$ не общего положения. Тогда три подпространства: $(A_1 \times B_1) \bigcap (A_2 \times B_2)$, $(B_1 \times C_1) \bigcap (B_2 \times C_2)$, $(A_1 \times C_1) \bigcap (A_2 \times C_2)$ — также необщего положения. Верно и обратное: если три указанные в заключении теоремы подпространства не общего положения, то три подпространства, указанные в условии теоремы, также находятся не в общем положении.*

Изучение этой гипотезы, полагаем, уместно вести, пользуясь методами проективной геометрии, использующих аксиому Веблена и технику «решетки» или «порядка», как приблизительно можно перевести термин lattice, используемый в англоязычной литературе [1]. Здесь мы говорили о евклидовых, а не о проективных пространствах, чтобы сохранять связь со статьей [4] и не перегружать ее терминологией, не существенной на данном этапе.

4.1. Перпендикулярность и скрытые пространства

С. Табачников в [2] доказывает, что теоремы проективной плоскости переносятся в трехмерное пространство. В нашей терминологии это означает, что в трехмерном пространстве *скрывается* проективная плоскость. Мы в [4], еще не зная о работе С. Табачникова, сформулировали такую гипотезу. Метод переноса (С. Табачников говорит о «конфигурационных» теоремах) в [2] и [4] совпадает: рассматривается общий перпендикуляр двух прямых в $\mathbb{R}^3$. В обеих работах для этого общего перпендикуляра используется одинаковый символ $S(A, B)$, который обозначает общий перпендикуляр прямых A и B. С. Табачников поясняет это обозначение английским словом Skew, переводящимся как кручение. Прямые A и B насажены, как на вертел, на ось вращения $S(A, B)$. В [4] называем $S(A, B)$ *соединителем* двух прямых A и B и видим в этом *частный* случай общего явления: соединитель есть не только у прямых в трехмерном пространстве. Перпендикуляр из точки A на прямую B является соединителем A и B на плоскости также хорошо, как их общий перпендикуляр в пространстве. Это открывает возможность формулировки обобщенной теоремы Дезарга на плоскости и рассмотрения многочисленных случаев ее *планиметрической реализации.* Обнаруживается ряд интересных планиметрических теорем, особо отметим теорему 2.1 *о взаимных перпендикулярах.* Эти идеи переносятся и в многомерное пространство, поскольку для двух подпространств A и B общего положения (не пересекающихся) всегда существует прямая L, перпендикулярная им обоим. Случаи параллельности мы исключаем, и поэтому прямая L — единственна. Мы будем говорить о евклидовом пространстве и выскажем новые гипотезы.

Пусть A и B — какие-то подпространства общего положения в W. У нас есть несколько возможностей определить соединитель A и B. *Соединителем* можно назвать прямую L, перпендикулярную им обоим. А можно назвать *соединителем* A и B подпространство Q, включающее в себя L и перпендикулярное $A \times B$. В обоих случаях мы можем определять трехсторонники (ср. [4], определение 4.2) в многомерном пространстве так же просто, как треугольники на плоскости. Аналогом операции проведения прямой через точки A и B будет операция $\times$ (обозначаемая также $\vee$, см. [1]). Аналогом операции пересечения двух прямых будет их *соединитель.* Впрочем, в некоторых случаях соединитель будет также аналогом проведения прямой через две точки. Поясним это на примере трехсторонника в $\mathbb{R}^5$, составленного из прямых A, B, C.

В общем случае три прямые задают пятимерное пространство. Мы можем назвать A, B, C *вершинами* трехсторонника, а его *сторонами* – $A \times B, B \times C, C \times A$. Тогда высотами этого трехсторонника разумно считать три соединителя *вершин* с противоположными *сторонами* $S(A, B \times C), S(B, C \times A), S(C, A \times B)$. Возникает вопрос, какая связь между этими высотами? Мы ожидаем, что здесь возможно обобщение теоремы Хьемслева–Морли (в [2] эту теорему называют теоремой Петерсена–Морли), которая, в свою очередь, обобщает теорему о перпендикулярах треугольника.

Мы можем определить трехсторонник, образованный прямыми A, B, C, иначе. *Вершинами* трехсторонника снова будут прямые A, B, C, а *стороны* мы определим так: $\acute{C} = S(A, B), \acute{B} = S(A, C), \acute{A} = S(B, C)$. Естественным обобщением трехмерной теоремы Хьемслева–Морли будет такое утверждение: прямые $S(A, \acute{A}), S(B, \acute{B}), S(C, \acute{C})$ имеют общий соединитель. Заметим, что неочевидно даже, что эти три прямые лежат в одном трехмерном пространстве. И мы не исключаем возможности, что такое обобщение слишком сильно и не имеет места в действительности.

Выше мы указывали на несколько способов определить соединитель. В последнем примере соединителем мы называем общий перпендикуляр двух прямых. Что удобно назвать соединителем в первом примере, прояснится при выяснении поставленного вопроса. Заметим, что часто нам важен не сам соединитель, а три прямые, соединенные им. Такие прямые являются аналогом коллинеарных точек и конкурентных прямых. И это мы можем выразить просто: три прямые A, B, C должны быть не только перпендикулярны какой-то одной прямой L, но и все лежать в одном трехмерном пространстве. Мы выделяем такое расположение прямых потому, что в этом случае композиция симметрий относительно них — $A \circ B \circ C$ — снова есть симметрия относительно прямой (напомним, речь идет об $\mathbb{R}^5$), а именно это свойство композиции симметрий Ф. Бахман в [3] использует для определения пучка.

Отметим, что аналогичную работу можно проделывать и с теоремами проективной геометрии, комбинируя идеи скрытых пространств и методов [2] и [4] и переводя, например, теорему Дезарга на язык перпендикулярных прямых в многомерном пространстве. Завершая наши гипотезы и рассмотрение возможных обобщений, отметим следующее: мы можем переносить большую часть проделанных построений с прямых в пятимерном пространстве на произвольные подпространства A, B, C в $\mathbb{R}^n$.

Мы благодарны проф. В.П. Одинцу за внимание и ценные замечания к этой статье.

Список литературы

1. **Cameron Peter J.** Projective and Polar Spaces // www.maths.qmul.ac.uk: School of Mathematical Sciences. 2000. URL: http://www.maths.qmul.ac.uk/pjc/pps/ (дата обращения: 01.04.2016).

2. **Tabachnikov S.** Skewers // https://arxiv.org/archive/math: Cornell University Library. Mathematics. [math.MG] 19 Sep 2015. URL: https://arxiv.org/pdf/1509.05903.pdf (дата обращения: 01.04.2016).

3. **Бахман Ф.** Построение геометрии на основе понятия симметрии / пер. с нем. Р.И. Пименова; под ред. И.М. Яглома. М.: Наука, 1969. 380 с.

4. **Пименов Р.** Обобщения теоремы Дезарга: геометрия перпендикулярного // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. Вып. 1 (21). 2016. С. 28–43.

Санкт-Петербургский национальный исследовательский академический университет *Поступила 02.07.2016*

Summary

Pimenov R. R. The generalization of the Desargues's theorem and hidden subspaces

This article studies the generalization of the Desargues's theorem in 7-dimensional space. We consider lines as points and 3-dimensional spaces as lines. It provides us with the conception of the hidden spaces. The result is generalized for multidimensional spaces of arbitrary dimension. The article continues the research, started in the work. The generalization of the Desargues's theorem and geometry of perpendicularity.
Keywords: The Desargues's theorem, projective stereometry, many-dimensional space.

References

1. **Cameron Peter J.** Projective and Polar Spaces // www.maths.-qmul.ac.uk: School of Mathematical Sciences. 2000. URL: http: // www.maths.qmul.ac.uk/pjc/pps/ (date of the application: 01.04.2016).

2. **Tabachnikov S.** Skewers // https://arxiv.org/archive/math: Cornell University Library. Mathematics. [math.MG] 19 Sep 2015. URL: https://arxiv.org/pdf/1509.05903.pdf (date of the application: 01.04.2016).

3. **Friedrich Bachmann.** Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Volume 96, 1973.

4. **Pimenov R.** The generalization the Desargues's theorem and geometry of perpendicularity // Bulletin of Syktyvkar State University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. Edition 1 (21). 2016. Pp. 28–43.

Для цитирования: Пименов Р. Р. Обобщения теоремы Дезарга: скрытые пространства // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 44–57.

For citation: Pimenov R. R. The generalization the Desargues's theorem and hidden supspace // Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2016. №1 (21). Pp. 44–57.