

УДК 678.027.94.001

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБЪЕМНОГО  
ОТВЕРЖДЕНИЯ

*Н. А. Беляева, Л. В. Клычников*

Представлен метод определения напряженного состояния цилиндрического изделия в ходе его объемного отверждения (совмещенный процесс полимеризации и кристаллизации). На основе механической модели вязкоупругого тела получено интегральное уравнение типа Вольтерра относительно потенциала, решение которого с помощью преобразования Лапласа дает формулы для расчета напряжений.

В настоящей работе представлен метод определения напряженного состояния цилиндрического изделия в условиях объемного отверждения посредством рассмотрения интегрального уравнения относительно потенциала. Предлагаемый метод позволяет учитывать явление вязкого течения, характерное для композитных материалов при повышении температуры. Большое значение имеет учет реологических эффектов при проектировании отверждаемых полимерных и композиционных элементов и конструкций.

Поскольку соотношения между напряжениями и деформациями для вязкоупругих материалов содержат время, то даже при постоянных значениях температуры соответствующие задачи будут нестационарными и, следовательно, динамическими. Однако будем считать, что в рассматриваемых задачах возможен квазистатический подход и к данным задачам можно применить "несвязанную теорию" термовязкоупругости, когда оказывается возможным раздельное определение напряженного состояния и температурного поля.

Предлагаемый метод основан на решении уравнения последовательности Больцмана-Вольтерры, предложенный Ю.Н.Работновым [1] в

следующей форме:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} \bar{K}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (1)$$

где  $\varphi(\varepsilon)$  — некоторая функция деформации,  $\bar{K}(t-\tau)$  — так называемое ядро последействия.

Рассмотрим объемное формирование (отверждение) изделия в виде полого цилиндра ( $R_1 \leq r \leq R$ ) в ходе совместного протекания реакций полимеризации и кристаллизации. Распределение температуры ( $T = T(r, t)$ ), глубины полимеризации ( $\alpha = \alpha(r, t)$ ) и глубины кристаллизации ( $\eta = \eta(r, t)$ ) определяется на основе макрокинетической модели совмещенного процесса [2,3]. Найдем напряженное состояние цилиндра при определенной зависимости между вязкоупругими деформациями и напряжениями. Пространственно-временное поведение отверждающегося материала изделия можно полностью описать следующей системой определяющих соотношений: уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{r}; \quad (2)$$

условие совместности деформаций

$$\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi}{r}, \quad (3)$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  — радиальная и окружная компоненты напряжений;  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$  — радиальная и окружная компоненты деформаций. Уравнения (2), (3) справедливы в общем случае неупругой сплошной среды.

В рассматриваемом случае полные компоненты деформаций в (3) являются суммой вязко-упругой  $\varepsilon^*$ , температурной  $\varepsilon_y^T$  и химической  $\varepsilon_y^x$  составляющих:

$$\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon_y^T + \varepsilon_y^x. \quad (4)$$

Температурная усадка определяется обычным образом:

$$\varepsilon_y^T = \alpha_0(T - T_0),$$

где  $\alpha_0$  — аналог коэффициента линейного температурного расширения материала; для простоты будем считать его постоянным во

все время отверждения;  $T = T(r, t)$  — текущая температура;  $T_0$  — начальная температура отверждаемого материала. Деформация химической усадки пропорциональна глубине реакции отверждения (совмещенный процесс полимеризации и кристаллизации):

$$\varepsilon_y^x = \varepsilon_{\text{пол}} + \varepsilon_{\text{кр}},$$

где  $\varepsilon_{\text{пол}}$  — усадка материала вследствие реакции полимеризации;  $\varepsilon_{\text{кр}}$  — усадка материала вследствие реакции кристаллизации. Предполагаем, что последние пропорциональны глубине полимеризации и кристаллизации, то есть

$$\varepsilon_{\text{пол}} = k_1 \alpha, \quad \varepsilon_{\text{кр}} = k_2 \eta,$$

где  $k_1, k_2$  — константы.

В двумерном случае вязко-упругая составляющая деформации  $\varepsilon^*$  связана с напряжениями выражением:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^* \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} + \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} f_{rr}(t-\tau) & f_{r\varphi}(t-\tau) \\ f_{\varphi r}(t-\tau) & f_{\varphi\varphi}(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\varepsilon_{rr}^*, \varepsilon_{\varphi\varphi}^*$  — радиальная и окружная вязко-упругие компоненты деформаций;  $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$  — соответствующие компоненты напряжений;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль упругости среды Гука.

Записывая (5) покомпонентно, получим:

$$\varepsilon_{rr}^* = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}) + \int_0^t f_{rr}(t-\tau)\sigma_{rr}(\tau)d\tau + \int_0^t f_{r\varphi}(t-\tau)\sigma_{\varphi\varphi}d\tau, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{1}{E}(\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr}) + \int_0^t f_{\varphi r}(t-\tau)\sigma_{rr}(\tau)d\tau + \int_0^t f_{\varphi\varphi}(t-\tau)\sigma_{\varphi\varphi}d\tau.$$

Если в (6) положить

$$f_{rr} = f_{\varphi\varphi}, \quad f_{rr} = -f_{r\varphi}, \quad f_{\varphi\varphi} = -f_{\varphi r},$$

то

$$\varepsilon_{rr}^* = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}) + \int_0^t f_{rr}(t-\tau)(\sigma_{rr}(\tau) - \sigma_{\varphi\varphi}(\tau))d\tau, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{1}{E}(\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr}) + \int_0^t f_{rr}(t-\tau)(\sigma_{\varphi\varphi}(\tau) - \sigma_{rr}(\tau))d\tau.$$

Выражения (7) являются обращением преобразования Лапласа следующих соотношений между напряжениями и деформациями в "изображениях":

$$\overline{\varepsilon_{rr}}(s) = k_{rr}(s)\sigma_{rr}(s) + k_{r\varphi}(s)\sigma_{\varphi\varphi}(s), \quad (8)$$

$$\overline{\varepsilon_{\varphi\varphi}}(s) = k_{\varphi r}(s)\sigma_{rr}(s) + k_{\varphi\varphi}(s)\sigma_{\varphi\varphi}(s).$$

Здесь

$$k_{rr}(s) = k_{\varphi\varphi}(s) = \frac{1}{2G(s)(1+\nu(s))},$$

$$k_{r\varphi}(s) = k_{\varphi r}(s) = -\frac{\nu(s)}{2G(s)(1+\nu(s))}, \quad (9)$$

$$G(s) = \frac{E(s)}{2(1+\nu(s))}.$$

Соотношения (8), (9) получены из соответствующих эквивалентных соотношений, связывающих упругие деформации с напряжениями, для цилиндра:

$$\varepsilon_{rr}^{\text{упр}} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\text{упр}} = \frac{1}{E}(\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr}) \quad (10)$$

путем формальной замены упругих постоянных  $\nu, E, G$  "изображениями"  $\nu(s), E(s), G(s)$  и с учетом условия несжимаемости материала при вязкоупругих деформациях:

$$\frac{1-\nu(s)}{E(s)} = \frac{1-\nu}{E}.$$

Функциям  $f_{rr}$  и  $f_{r\varphi}$  соответствуют "изображения":

$$f_{rr}(t) \div k_{rr}(s) - \frac{1}{E_1} = \frac{1}{E(s)} - \frac{1}{E_1},$$

(11)

$$f_{r\varphi}(t) \div k_{r\varphi}(s) + \frac{\nu}{E} = -\frac{\nu(s)}{E(s)} + \frac{\nu}{E}.$$

Разные модели вязкоупругости определяются, соответственно, разными зависимостями  $\nu(s)$ ,  $E(s)$ ,  $G(s)$ . Для механической модели вязко-упругого тела, представляющей собой последовательно соединённые среду Гука и среду Кельвина [2]:

$$E(s) = E \frac{s + \mu}{s + \lambda},$$

$$\nu(s) = \frac{(\lambda - \mu(1 - \nu)) + \nu s}{s + \lambda},$$

где

$$\lambda = \frac{E + E_1}{\beta}, \quad \mu = \frac{E_1}{\beta}.$$

Тогда из (11) следует:

$$f_{rr}(t) \div \frac{1}{E} \cdot \frac{\lambda - \mu}{s + \mu}.$$

Из последнего соотношения получим

$$f_{rr}(t) = \frac{\lambda - \mu}{E} e^{-\mu t}.$$

Введём обозначения:

$$\Omega(r, t) = \varepsilon_y^x + \varepsilon_y^T,$$

тогда

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^* + \Omega_r(r, t),$$

(12)

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \Omega_{\varphi}(r, t).$$

Положим

$$\chi(r, t) = \frac{\partial(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})}{\partial r}$$

(13)

Введём в рассмотрение функцию  $\Phi = \Phi(r, t)$  — потенциал, такую, что:

$$\sigma_{rr} = \frac{\Phi}{r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}. \quad (14)$$

Тогда условие равновесия (2) удовлетворяется автоматически, а уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r} + \int_0^t \tilde{f}_{rr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r} \right) d\tau + E \left( \Omega_\varphi - \int_{R_1}^r \frac{\Omega_r - \Omega_\varphi}{r} dr \right) \right] = 0. \quad (15)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^t \tilde{f}_{rr}(t-\tau)\Phi(r, \tau) d\tau + \Phi(r, t) \right) + \\ & + \frac{1}{r} \left( \int_0^t \tilde{f}_{rr}(t-\tau)\Phi(r, \tau) d\tau + \Phi(r, t) \right) = \\ & = -E \left( \Omega_\varphi(r, t) - \int_{R_1}^r \frac{\Omega_r(r, t) - \Omega_\varphi(r, t)}{r} dr \right) + \Psi(t), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\Psi(t)$  — произвольная функция времени;  $\tilde{f} = f \cdot E$ .

Введём обозначение:

$$\Phi(r, t) + \int_0^t \tilde{f}_{rr}(t-\tau)\Phi(r, \tau) d\tau = J(r, t), \quad (17)$$

тогда (16) распадётся на два связанных уравнения: одно — дифференциальное, другое — интегральное:

$$\frac{\partial J(r, t)}{\partial r} + \frac{J(r, t)}{r} = F(r, t) + \Psi(t), \quad (18)$$

$$\Phi(r, t) + \int_0^t \tilde{f}_{rr}(t-\tau)\Phi(r, \tau) d\tau = J(r, t),$$

где

$$F(r, t) = -E \left( \Omega_{\varphi}(r, t) - \int_{R_1}^r \frac{\Omega_r(r, t) - \Omega_{\varphi}(r, t)}{r} dr \right).$$

При этом функции  $\chi(r, t)$ ,  $\Phi(r, t)$  связаны дифференциальной зависимостью:

$$\chi(r, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{r^2}. \quad (19)$$

Функцию  $F(r, t) = F(\Omega_r(r, t); \Omega_{\varphi}(r, t))$  будем считать известной. Она может быть найдена из решения системы уравнений теплопроводности и химической кинетики при заданных начальных и граничных условиях [2,3].

Для однозначного определения напряженного состояния из системы (18) посредством (14) необходимо задать функцию  $\Psi(t)$ , имеющую смысл деформации из дополнительных соображений. Поскольку

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r} = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi},$$

то из (15) следует, что

$$\Psi(t) = \int_0^t \tilde{f}_{rr}(\sigma_{rr}(r, \tau) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, \tau)) d\tau + \sigma_{rr}(r, t) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, t) - F(r, t) \quad (20)$$

и вполне естественно отыскивать функцию  $\Psi(t)$  исходя из граничных условий: на внутренней поверхности цилиндра ( $R_1$ ) достаточно задать значение суммы нормальных напряжений в зависимости от времени:

$$\sigma_{rr}(R_1, t) + \sigma_{\varphi\varphi}(R_1, t) = \varphi(t).$$

Если внутренняя поверхность ( $R_1$ ) свободна от напряжений, то можно принять  $\varphi(t) \equiv 0$ , тогда  $\Psi(t) \equiv 0$ .

Будем поэтому полагать  $\Psi(t)$  определенной из тех или иных соображений, и для упрощения дальнейших рассуждений примем  $\Psi(t) \equiv 0$ . Внешнюю поверхность ( $R$ ) отверждаемого изделия будем считать свободной от напряжений:  $\sigma_r(R, t) = 0$ .

Тогда согласно (14), (17)

$$\Phi(R, t) = 0, \quad J(R, t) = 0,$$

и дифференциальное уравнение системы (18) разрешается:

$$J(r, t) = -\frac{1}{r} \int_r^R F(r, t) r dr. \quad (21)$$

Тогда интегральное уравнение для потенциала примет вид:

$$\Phi(r, t) + \int_0^t \tilde{f}_{rr}(t - \tau) \Phi(r, \tau) d\tau = -\frac{1}{r} \int_r^R F(r, t) r dr. \quad (22)$$

Здесь

$$f_{rr}(t) = \frac{\tilde{f}_{rr}(t)}{E} = \frac{\lambda - \mu}{E} * \exp\{-\mu t\}. \quad (23)$$

Второе уравнение системы (18) запишется

$$\Phi(r, t) + \int_0^t (\lambda - \mu) * \exp\{-\mu(t - \tau)\} * \Phi(r, \tau) d\tau = J(r, t), \quad (24)$$

где  $J(r, t)$  определяется выражением (21).

Применение преобразования Лапласа к уравнению (24) позволяет записать решение в "изображениях":

$$\Phi(r, s) + \frac{(\lambda - \mu)\Phi(r, s)}{\mu + s} = J(r, s), \quad (25)$$

или

$$\Phi(r, s) = \frac{s + \mu}{s + \lambda} J(r, s). \quad (26)$$

Обращение преобразования Лапласа, применённое к (26), даёт решение — оригинал для потенциала  $\Phi(r, t)$ :

$$\Phi(r, t) = J(r, t) - (\lambda - \mu) \int_0^t \exp\{-\lambda(t - \tau)\} J(r, \tau) d\tau. \quad (27)$$

Тогда для компонент напряжений  $\sigma_r(r, t)$ ,  $\sigma_\varphi(r, t)$  согласно (14), получаем:

$$\sigma_r(r, t) = \frac{1}{r} \left( J(r, t) - (\lambda - \mu) \int_0^t \exp\{-\lambda(t - \tau)\} J(r, \tau) d\tau \right),$$



$$\sigma_{\varphi}(r, t) = \frac{\partial J(r, t)}{\partial r} - (\lambda - \mu) \int_0^t \exp\{-\lambda(t - \tau)\} \frac{\partial J(r, \tau)}{\partial r} d\tau. \quad (28)$$

Таким образом получили систему соотношений (28) для определения радиальной  $\sigma_r(r, t)$  и окружной  $\sigma_{\varphi}(r, t)$  компонент напряжений.

Система (28) решается при начальных условиях:

$$t = 0 : \quad \sigma_r(r, t) = 0, \quad \sigma_{\varphi}(r, t) = 0, \quad (29)$$

и граничных условиях:

$$\sigma_r(r, t) \Big|_{(R_1, t)} = 0, \quad \sigma_{\varphi}(r, t) \Big|_{(R_1, t)} = 0, \quad \sigma_r(r, t) \Big|_{(R, t)} = 0. \quad (30)$$

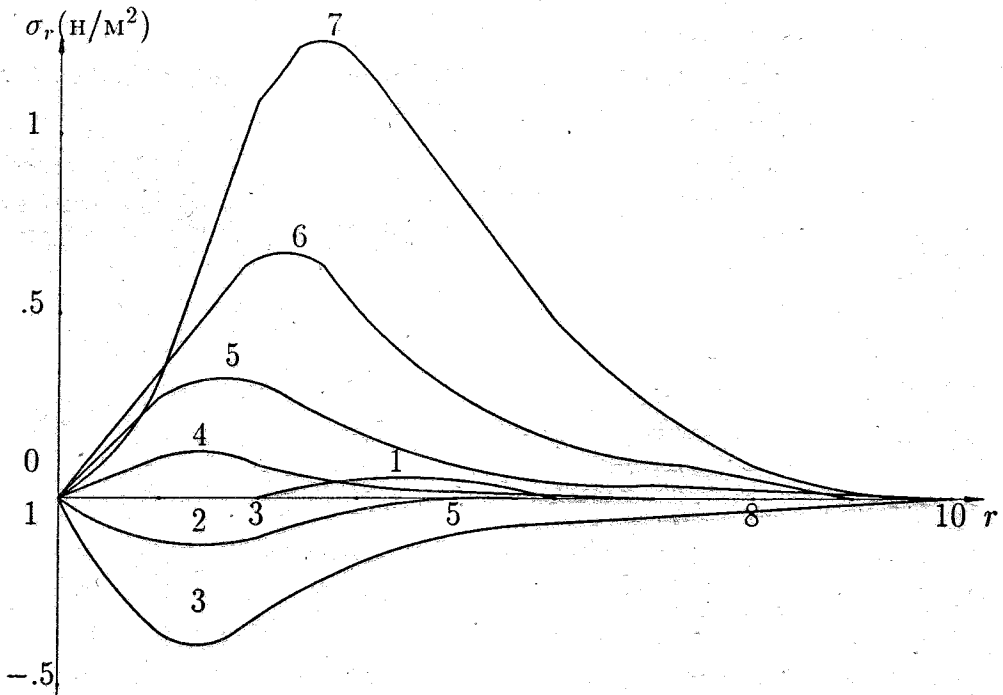


Рис.1. Пространственно-временное распределение радиальных  $\sigma_r$  напряжений;  
 $t$ (сек) : 1 - 12, 2 - 14, 3 - 20, 4 - 50, 5 - 70, 6 - 110, 7 - 200.

На рис.1 представлены в виде графиков результаты расчетов по формуле (28) радиальной компоненты напряжений в процессе отверждения полого цилиндрического изделия ( $R_1 = 1$ см,  $R = 10$ см).

## Литература

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
2. Беляева Н.А., Клычников Л.В., Давтян С.П., Худяев С.И. Напряженное состояние при формировании цилиндрического изделия в ходе параллельного протекания реакций полимеризации и кристаллизации// *Механика композитных материалов*. 1991. №6. С.1091-1099.
3. Беляева Н.А., Беляев Ю.Н. Регулирование уровня внутренних напряжений формируемого изделия в ходе совместного процесса полимеризации и кристаллизации// *Вестник Сыктывкар. ун-та. Сер. 1*. Вып.1. 1995. С.119-127.

## Summary

Belyaeva N. A., Klichnikov L. V. Integral equation method in the volume hardening problem.

Volterra integral equation relative to potential for internal strain calculation for the cylindrical product hardening process is obtained. Laplas transformation of this equation is used for deriving the needed formulas.

*Сыктывкарский университет*

*Поступила 15.12.95*